Семинар 6. **Начала теории представлений.**

Задача 1. Вычислите размерность $\dim \mathrm{Hom}_G(U, V)$ для представлений группы $G = \mathbb{S}_n$ в пространствах U, V из задачи 5 предыдущего семинара.

Задача 2. Для группы $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ определим двумерное представление ρ_m над полем $\Bbbk$ по следующему правилу

$$\rho_m(k) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi mk}{n}) & -\sin(\frac{2\pi mk}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi mk}{n}) & \cos(\frac{2\pi mk}{n}) \end{pmatrix}$$

Ответьте на каждый из задаваемых вопросов в двух случаях: если поле скаляров $\Bbbk = \mathbb{R}$ или $\Bbbk = \mathbb{C}$.

(a) Покажите, что это представление.

(b) Для каких m и n это представление неприводимо?

(c) Найдите $\dim \mathrm{Hom}(\rho_m, \rho_l)$.

Задача 3. Обозначим за $\rho_{n,\lambda}$ n-мерное комплексное представление группы $\mathbb{Z}$, в котором образующая циклической группы действует посредством одного жорданового блока максимального размера с собственным значением λ.

(a) Для каких n представление $\rho_{n,\lambda}$ неприводимо?

(b) Покажите, что любое конечномерное комплексное представление группы $\mathbb{Z}$ является прямой суммой таких.

Найдите **(c)** $\dim \mathrm{Hom}(\rho_{n,\lambda}, \rho_{m,\mu})$; **(d)** $\dim \mathrm{Hom}(\rho_{n,\lambda}, \rho_{n,\lambda})$; **(e)** $\dim \mathrm{Hom}(\rho_{n,\lambda}, \rho_{m,\lambda})$.

Задача 4. Докажите, что любое конечномерное неприводимое комплексное представление алгебры многочленов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ одномерно.

Задача 5. Докажите, что стандартное 2-мерное представление алгебры $M_2(\mathbb{C})$ неприводимо и что это единственное (с точностью до изоморфизма) неприводимое представление этой алгебры. Верно ли, что любое представление алгебры 2×2-матриц вполне приводимо?

Задача 6. Для каких натуральных чисел n существует

(a) неприводимое представление алгебры верхнетреугольных матриц размерности n?

(b) неразложимое представление алгебры верхнетреугольных матриц размерности n?