Семинар 5. **Начала теории представлений.**

Задача 1. Зафиксируем положительные вещественные числа a, b, α. Какие из следующих отображений $\rho : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{C})$ определяют представление?

(a) $\rho(n) := \left(\begin{smallmatrix} an & 0 \\ 0 & bn \end{smallmatrix}\right)$; **(b)** $\rho(n) := \left(\begin{smallmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{smallmatrix}\right)$; **(c)** $\rho(n) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & an \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; **(d)** $\rho(n) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & a^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;

(e) $\rho(n) := \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$.

Для всех представлений найдите одномерное инвариантное подпредставление и опишите соответствующее факторпредставление.

Задача 2. Зафиксируем невырожденную матрицу $A \in M_n(\Bbbk)$. Покажите, что

(a) соответствие $\rho_A(k) = A^k$ задает представление группы $(\mathbb{Z}, +)$ размерности n над полем $\Bbbk$;

(b) если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то представление ρ_A имеет инвариантное одномерное подпредставление;

(c) для $\Bbbk = \mathbb{R}$ и $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ представление ρ_A неприводимо;

(d) представления ρ_A и ρ_B эквивалентны тогда и только тогда, когда матрицы A и B имеют одинаковую фробениусову форму, (жорданову нормальную форму, если $\Bbbk = \mathbb{C}$).

Задача 3. Найдите все одномерные представления циклической группы $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$

(a) над $\mathbb{C}$, **(b)** над $\mathbb{R}$, **(c)** над $\mathbb{Q}$, **(d)** над $\mathbb{F}_2$.

Задача 4. Пусть G – группа, $\rho : G \to End_{\mathbb{C}}(V)$ – её комплексное представление. Покажите, что

(a) если $g \in G$ – элемент конечного порядка, то $\rho(g)$ – диагонализуемый оператор; (приведите пример, когда это не так для элементов бесконечного порядка;)

(b) если $g_1, g_2 \in G$ – два коммутирующих элемента конечного порядка, то $\rho(g_1), \rho(g_2)$ диагонализуемы одновременно;

(c) если G – конечная абелева группа, то любое её неприводимое комплексное представление одномерно;

(d) если $g \in G'$ и $\dim(V) = 1$, то $\rho(g) = 1$.

Задача 5. Пусть $V \simeq \mathbb{C}^n$. Определим перестановочное представление $\rho : \mathbb{S}_n \to \mathsf{GL}(V)$ по следующему правилу:

$$\rho(\sigma)((x_1, \ldots, x_n)) = (x_{\sigma^{-1}}(1), \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \sigma \in \mathbb{S}_n.$$

(a) Покажите, что это представление. В частности, почему написано σ^{-1}?

(b) Покажите, что прямая $l = (x, \ldots, x)$ является инвариантным подпространством в V.

(c) Найдите инвариантное подпространство $U \subset V$ такое, что $V = l \oplus U$.

(d) Покажите, что такое U единственно.

(e) Покажите, что представление группы $\mathbb{S}_n$ в U неприводимо.

Задача 6. Покажите, что представление V группы G не может быть неприводимым, если

(a) $|G| < \dim V$;

(b) существует подгруппа $H \subset G$ и её подпредставление $U \subset V$ такие, что

$$\dim V > [G : H] \dim U.$$

Задача 7. Опишите все конечномерные представления группы $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$

(a) над $\mathbb{C}$, **(b)** над алгебраически замкнутым полем характеристики 2.

Задача 8*. Опишите все конечномерные представления группы $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$

(c) над $\mathbb{C}$, **(d)** над алгебраически замкнутым полем характеристики p.