Семинар 3. **Разрешимые группы.**

Задача 1. Найдите коммутант G' группы G и порядок факторгруппы G/G':
(a) $G = \mathbb{S}_3$; **(b)** $G = A_4$; **(c)** $G = \mathbb{S}_4$; **(d)** $G = D_n$; **(e)** $G = \mathbb{S}_n$; **(f)** $G = A_n$.

Задача 2. Докажите следующие свойства коммутанта G' группы G:
(a) G' — нормальная подгруппа в G;
(b) факторгруппа G/G' — коммутативна;
(c) если N – нормальная подгруппа в G и G/N коммутативна, то $G' \subset N$;
(d) ядро гомоморфизма группы G в коммутативную группу содержит коммутант.

Задача 3. Докажите, что группа верхнетреугольных унитрегольных матриц разрешима.

Задача 4. Докажите, что любая p-группа разрешима и все её простые подфакторы изоморфны $\mathbb{Z}_p$.

Задача 5. Докажите, что
(a) всякая подгруппа разрешимой группы разрешима;
(b) всякая факторгруппа разрешимой группы разрешима;
(c) прямое произведение разрешимых групп разрешимо;
(d) если $G/A \simeq B$ и A, B – разрешимые группы, то G разрешима.

Задача 6. Докажите разрешимость групп **(a)** S_4, **(b)** Q_8.

Задача 7. Докажите, что группы порядков **(a)** p; **(b)** pq; **(c)*** pqr разрешимы, где p, q, r – различные простые числа.

Задача 8. Найдите коммутанты групп $GL_n(\mathbb{F})$ и $SL_n(\mathbb{F})$ для $n \geqslant 3$ и произвольного поля $\mathbb{F}$.

Семинар 4. **Силовские подгруппы.**

Задача 1. Опишите силовские 2- и 3-подгруппы в группах: **(a)** $\mathbb{S}_3$, **(b)** A_4.

Задача 2. Сколько различных силовских p подгрупп в $\mathbb{S}_p$ для простого p?

Задача 3. Пусть G — конечная группа, а H — её нормальная подгруппа. Докажите или опровергните утверждения:
(a) силовская p-подгруппа в G нормальна тогда и только тогда, когда она единственна;
(b) проекция $G \twoheadrightarrow G/H$ переводит силовскую подгруппу в силовскую;
(c) пересечение H с силовской p-подгруппой P в G является силовской p-подгруппой в H.

Задача 4. Сколько различных силовских 2-подгрупп и силовских 5-подгрупп в некоммутативной группе порядка 20.

Задача 5. Докажите, что группа порядка 255 — циклическая.

Задача 6. Докажите, что не существует простых групп порядка:
(a) pq (p, q – простые числа); **(b)** 36; **(c)** 80; **(d)** 56; **(e)** 196; **(f)** 200.

Задача 7. Пусть H – наибольшая подгруппа в G, содержащая силовскую p-подгруппу P, как нормальную. Докажите, что $|G|/|H| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.

Задача 8. Запишем количество силовских p-групп в G в p-адической форме $1+k_1p+k_2p^2+\ldots$. Докажите, что k_rp^r равно количеству таких силовских p-групп S, что индекс группы $S \cap P$ в P равен p^r.

Задача 9. Докажите, что подгруппа верхних унитреугольных матриц является силовской p-подгруппой в $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Сколько силовских p-подгрупп в $GL_n(\mathbb{F}_p)$?