Семинар 2. **Автоморфизмы групп.**

Задача 1. Докажите, что группа автоморфизмов группы G нетривиальна, если **(a)** G — неабелева; **(b)** G — абелева и содержит элементы порядка больше 2; **(c)** порядок группы G больше 2 и все неединичные элементы группы G имеют порядок 2; **(d)** G — любая группа порядка больше 2.

Задача 2. Опишите группу автоморфизмов $Aut(G)$ абелевой группы G по сложению, для **(a)** $G = \mathbb{Z}$ **(b)** $G = \mathbb{Z}_n$; **(c)** $G = \mathbb{Q}$; **(d)** $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ **(e)** G — свободная абелева группа ранга n.

Задача 3. Докажите цикличность

(a) группы $\mathbb{Z}_p^*$ для простого p;

(b) любой конечной подгруппы мультипликативной группы поля;

(c) * группы автоморфизмов конечного поля (докажите, что она порождена автоморфизмом Фробениуса).

Задача 4. Верно ли, что группа $\mathbb{Z}_m^*$ циклическая для любого m?

(a) опишите группы автоморфизмов $Aut(\mathbb{Z}_9)$ и $Aut(\mathbb{Z}_8)$;

(b) сколько элементов в группе $Aut(Aut(Aut(\mathbb{Z}_9)))$?

Задача 5. Пусть $H \triangleleft G$ и дан гомоморфизм групп $s : G/H \to G$ такой, что композиция $G/H \xrightarrow{s} G \xrightarrow{\pi} G/H$ является тождественным отображением. Постройте гомоморфизм $\varphi : G/H \to Aut(H)$ и докажите, что G изоморфна полупрямому произведению групп G/H и H относительно этого гоморфизма.

Задача 6. Верно ли, что автоморфизм группы сохраняет разбиение группы на

(a) подмножества элементов фиксированного порядка;

(b) классы сопряженных элементов;

(c) левые смежные классы по заданной подгруппе.

Если сохраняет, то может ли переставлять эти множества между собой?

Задача 7. Опишите все внутренние и внешние автоморфизмы группы диэдра D_n.

Задача 8. Определите на множестве гомоморфизмов $Hom(A, B)$ из группы A в абелеву группу B структуру абелевой группы. Опишите группы гомоморфизмов:

(a) $Hom(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_6)$; **(b)** $Hom(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12})$; **(c)** $Hom(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{18})$; **(d)** $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$; **(e)** $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$; **(f)** $Hom(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$; **(g)** $Hom(S_n, \mathbb{Z}_m)$;

Задача 9. *(О конечных подгруппах в $SL_n(\mathbb{Z})$.)* Для $n, p \geqslant 2$ обозначим за $SL_n(\mathbb{Z}; p\mathbb{Z})$ множество матриц вида $Id + pX$ с определителем 1, где X – целочисленная матрица. Докажите что

(a) множество $SL_n(\mathbb{Z}; p\mathbb{Z})$ является нормальной подгруппой в $SL_n(\mathbb{Z})$;

(b) группа $SL_n(\mathbb{Z}; p\mathbb{Z})$ не содержит элементов конечного порядка для $p \geqslant 3$;

(c) порядок конечной подгруппы $SL_n(\mathbb{Z})$ делит $\frac{(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1})}{p-1}$ для любого нечетного простого p;

(d)* при условии, что $n \geqslant 3$, любая нормальная подгруппа конечного индекса в $SL_n(\mathbb{Z})$ содержит $SL_n(\mathbb{Z}; p\mathbb{Z})$ для какого-то p.