Семинар 1. **Группы: из материалов первого курса.**

Задача 1.

(a) Выпишите таблицу умножения для группы перестановок S_3 из 3-х элементов;

(b) Опишите все подгруппы в группе S_3. Какие из них являются нормальными?

Задача 2. Перечислите все элементы и их порядки для группы симметрий прямоугольной призмы с квадратным основанием.

Задача 3. Сколько элементов в группе автоморфизмов графа, имеющего 3 связных компоненты, каждая из которых является полным графом на 4-х вершинах? Каков индекс подгруппы, не переставляющей компоненты связности?

Задача 4. Найдите левые смежные классы группы G по подгруппе H, выясните нормальна ли подгруппа H, если нормальна, то опишите факторгруппу:

(a) G – аддитивная группа $\mathbb{Z}$, H – подгруппа $n\mathbb{Z}$ целых чисел, делящихся на n;

(b) G – циклическая группа порядка 24, H – подгруппа, порожденная 10-ой степенью образующей;

(c) G – группа перестановок S_n, H – подгруппа, сохраняющая на месте элементы $n-1, n$;

(d) G – группа по сложению для векторов на плоскости $\mathbb{R}^2$, H – подгруппа точек с целыми координатами;

(e) G – мультипликативная группа $\mathbb{C}^*$, H – подгруппа U чисел с модулем 1;

(f) G – группа $GL_n(\mathbb{F}_q)$ обратимых $n\times n$ матриц над полем из q элементов, H – подргуппа $SL_n(\mathbb{F}_q)$ матриц с определителем, равным 1;

(g) G – группа $GL_n(\mathbb{F}_q)$, H – подргуппа, сохраняющая фиксированное подпространство размерности $m < n$.

Задача 5. Опишите орбиты для следующих действий групп на множествах:

(a) группа движений плоскости на множестве окружностей на плоскости;

(b) группа движений плоскости на множестве упорядоченных пар прямых на плоскости;

(c) группа проективных преобразований плоскости на множестве упорядоченных троек прямых на проективной плоскости;

(d) группа проективных преобразований плоскости на множестве упорядоченных четверок прямых на проективной плоскости.

Задача 6. Какие из следующих подгрупп нормальны? Для нормальных подгрупп найдите соответствующие факторгруппы.

(a) Подгруппа параллельных переносов в группе аффинных преобразований плоскости.

(b) Подгруппа поворотов относительно данной точки в группе движений плоскости.

(c) Подгруппа параллельных переносов и гомотетий в группе аффинных преобразований плоскости.

Задача 7. Пусть H – подгруппа конечной группы G, $a \in G$. Доказать, что

(a) отображение $\sigma_a : gH \mapsto agH$ есть перестановка на множестве классов смежности G/H;

(b) отображение $f : a \mapsto \sigma_a$ определяет действие группы G на G/H, в частности, f задает гомоморфизм G в симметрическую группу.

(c) σ_a является тождественной перестановкой в том и только в том случае, когда a принадлежит пересечению всех подгрупп, сопряженных с H.

(d) Пусть H – подгруппа индекса p в конечной группе G. Докажите, что если p – минимальный простой делитель порядка G, то подгруппа H нормальна в G.

Задача 8. Пусть выбраны две группы G, H и с каждым элементом $h \in H$ ассоциирован автоморфизм $\varphi_h : G \to G$, причем сопоставление $h \mapsto \varphi_h$ является гомоморфизмом групп $H \to \mathrm{Aut}(G)$. Определим полупрямое произведение $G \rtimes_\varphi H$ как декартово произведение $G \times H$ с операцией $(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) = (g_1 \varphi_{h_1}(g_2), h_1 h_2)$.

(a) Докажите, что полупрямое произведение $G \rtimes_\varphi H$ является группой.

(b) Докажите, что $\{(g, e_H) \mid g \in G\} \subset G \rtimes_\varphi H$ является нормальной подгруппой, а $\{(e_G, h) \mid h \in H\} \subset G \rtimes_\varphi H$ является подгруппой, но не обязательно нормальной. Первая из этих подгрупп естественно изоморфна группе G, а вторая – группе H.

Задача 9. Существуют ли неабелевы группы порядков

(a) 15? **(b)** 21? **(c)** p^2, где p – простое? **(d)** p^3, где p – простое?