Семинар 14. Представления симметрических групп $\mathbb{S}_n$

Задача 1. Постройте взаимнооднозначное соответствие между классами сопряженности в симметрической группе $\mathbb{S}_n$ и разбиениями числа n.

Задача 2. Докажите, что централизатор Z_ρ перестановки с цикловым типом $\rho := \{\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_k\}$ изоморфен группе $\prod_{m\geqslant 1} \mathbb{S}_{i_m} \ltimes \mathbb{Z}_m^{i_m}$, где $i_m := |\{s|\rho_s = m\}|$. Вычислите количество элементов в соответствующем классе сопряженности.

Задача 3. Определим отображение из множества представлений симметрической группы $\mathbb{S}_n$ в симметрические функции степени n:

$$ch_n : \text{ Reps}(\mathbb{S}_n) \to \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathbb{S}_n}$$
$$ch(V) := \sum_{\rho\vdash n} \frac{p_\rho}{z_\rho}\chi_V(\rho),$$

симметрическая функция p_ρ определяется как произведение $p_{\rho_1} \ldots p_{\rho_k}$, где $p_k := \sum x_i^k$ – k-ая степенная сумма Ньютона; соответственно $z_\rho := |Z_\rho|$.

(a) Докажите, что для любых представлений V_1 и V_2 верно равенство $ch_n(V_1 \oplus V_2) = ch_n(V_1) + ch_n(V_2)$;

(b) Докажите, что отображение ch_n задаёт изоморфизм векторного пространства натянутого на характеры неприводимых представлений $\mathbb{S}_n$ и пространства симметрических функций степени n.

Указание: Вычислите образ ch_n на δ-функции класса сопряженности ρ;

(c) Вычислите образ $ch_n(\mathbb{C})$ от тривиального представления $\mathbb{S}_n$ и выразите его через полные симметрические функции;

(d) Вычислите образ $ch_n(Sgn_n)$ от знакового представления и выразите его через элементарные симметрические функции;

(e) Докажите, что отображение ch_n – изометрия, то есть выполнено равенство:

$$(\chi_V, \chi_W)_{\mathbb{S}_n} = (ch_n(V), ch_n(W))_\Lambda.$$

Напомним, что скалярное произведение в симметрических функциях Λ определяется так, что полиномы Ньютона $\{p_\rho|\rho \vdash n\}$ образуют ортогональный базис и $(p_\rho, p_\rho)_\Lambda := z_\rho$.

Задача 4. Воспользуйтесь формулой для характера индуцированного представления и докажите равенство:

$$ch_{n+m}(Ind_{\mathbb{S}_n\times\mathbb{S}_m}^{\mathbb{S}_{n+m}}(V \otimes W)) = ch_n(V)ch_m(W),$$

верное для любой пары представлений V и W симметрических групп $\mathbb{S}_n$ и $\mathbb{S}_m$ соответственно.

Задача 5. Докажите, что следующие представления изоморфны:

$$Sgn_{n+m} \otimes Ind_{\mathbb{S}_n\times\mathbb{S}_m}^{\mathbb{S}_{n+m}}(V \otimes W) \quad \text{ и } \quad Ind_{\mathbb{S}_n\times\mathbb{S}_m}^{\mathbb{S}_{n+m}}((Sgn_n \otimes V) \otimes (Sgn_m \otimes W)).$$

Какому отображению на кольце симметрических функций соответсвует операция умножения на знаковое представление? Является ли оно автоморфизмом кольца?

Задача 6. Вспомните, что кольцо симметрических функций порождается полными (соответственно элементарными) симметрическими функциям и докажите, что любое неприводимое представление симметрической группы $\mathbb{S}_n$ входит в разложение представлений $Ind_{\mathbb{S}_\lambda}^{\mathbb{S}_n}\mathbb{C}$ индуцированных с тривиальных (соответственно индуцированных со знаковых) представлений подгрупп $\mathbb{S}_\lambda$, занумерованных разбиениями $\lambda \vdash n$. Подгруппа $\mathbb{S}_\lambda := \mathbb{S}_{\lambda_1} \times \ldots \times \mathbb{S}_{\lambda_k}$ переставляет первые λ_1 элементов, следующие за ними λ_2 элементов, $\ldots$ множества $\{1, \ldots, n\}$, не перемешивая элементы между разными группами.