Семинар 13. Индуцирование и ограничение

Задача 1. Разложите на неприводимые ограничение представления ρ с группы G на подгруппу H:

(a) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_n$, ρ – стандартное двумерное представление движениями n-угольника;

(b) $G = S_n$, $H = S_{n-1}$, ρ – стандартное n-мерное перестановочное представление;

(c) $G = S_4$, $H = S_3$, ρ – неприводимое.

Задача 2. Пусть $H \subset G$ подгруппа и $\chi : H \to \mathbb{C}$ – её одномерное представление. Обозначим через $e_\chi = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\overline{\chi(h)}h$ соответствующий проектор в групповой алгебре подгруппы H. Докажите, что индуцированное представление $Ind_H^G\chi$ изоморфно левому идеалу $\mathbb{C}[G]e_\chi$ в групповой алгебре объемлющей группы G.

Задача 3. Пусть $H \trianglelefteq G$ – нормальная подгруппа. Сопряжения в G задают отображение $G \to Aut(H)$ и, тем самым, задают действие G на множестве $Irr(H) = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ всех неприводимых представлений нормальной подгруппы H. Докажите, что

(a) если пара H-неприводимых представлений ρ_i и ρ_j принадлежат одной орбите действия G на $Irr(H)$, то соответствующие индуцированные представления $Ind_H^G\rho_j$ и $Ind_H^G\rho_j$ изоморфны;

(b) разложение ограничения индуцированного представления $Res_H^G(Ind_H^G(\rho_i))$ в сумму неприводимых представлений группы H включает только неприводимые из орбиты $G\rho_i$; в частности, все они имеют одну и ту же размерность;

(c) представление $Ind_H^G\rho_i$ неприводимо тогда и только тогда, когда порядок орбиты $G\rho_i \subset Irr(H)$ равен индексу подгруппы $[G : H]$;

(d) $\dim End_G(Ind_H^G\rho_i) = \frac{[G:H]}{|G\rho_i|}$;

(e) разложение ограничения неприводимого представления группы G на подгруппу H включает неприводимые представления только из одной орбиты.