Семинар 12. Индуцированные представления

Задача 1. Пусть (V, ρ_V) — представление подгруппы $H \subset G$ индекса k, и пусть $x_1, \dots, x_k$ — набор представителей в G левых классов смежности G/H. Обозначим через W прямую сумму k копий V, индексируемых левыми классами смежности (то есть $W = \underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{k}$). Определим на W действие группы G следующим образом: элемент g переводит i-ую копию V в j-ую, если $gx_iH = x_jH$, то есть если $gx_i = x_jh_i$ для некоторого $h_i \in H$; соответствующий линейный оператор полагается равным $\rho_V(h_i)$.

(a) Покажите, что таким образом в W определено представление группы G (оно называется индуцированным представлением и обозначается $Ind_H^G \rho_V$; пространство W, рассматриваемое как G-модуль, обозначается $Ind_H^G V$).

(b) Покажите, что это представление не зависит от выбора представителей классов смежности, то есть представления, построенные по разным представителям классов смежности G/H, эквивалентны.

(c) Вычислите значение характера представления $Ind_H^G \rho_V$ на элементе $g \in G$ в терминах характера представления χ_V на элементах группы H.

(d) пусть U представление группы G, χ_U — его характер; $Res_H^G U$ ограничение представления U на подгруппу H. Докажите равенство (*двойственность Фробениуса*):

$$\dim Hom_G(Ind_H^G V, U) = \langle \chi_{Ind_H^G V}, \chi_U \rangle_G = \langle \chi_V, \chi_{Res_H^G U} \rangle_H = \dim Hom_H(V, Res_H^G U). \tag{1}$$

Задача 2. Опишите явно представления группы диэдра D_n, индуцированные с неприводимых представлений подгруппы поворотов.

Задача 3. Напомним, что группа Гейзенберга $Heis_p$ совпадает с группой верхних унитреугольных 3×3 матриц над полем $\mathbb{F}_p$. Рассмотрим подгруппу H матриц вида $A(x,z) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и ее одномерное представление $\tau_{\alpha,\gamma}$, заданное формулой$\tau_{\alpha,\gamma}(A(x,z) = \alpha^x \gamma^z$, где $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha^p = \gamma^p = 1$, Докажите, что индуцированное представление $Ind_H^{Heis_p} \tau_{\alpha,\gamma}$ эквивалентно представлению $\rho_{\alpha,\gamma}$ из 3-ей контрольной в этом году. Докажите с помощью двойственности Фробениуса, что оно неприводимо при $\gamma \neq 1$.

Какие ещё индуцированные представления вам встречались в этом семестре?

Задача 4. Докажите, что

(a) квазирегулярное представление $\Bbbk[G/H]$ изоморфно представлению $Ind_H^G \Bbbk$, индуцированному с тривиального представления H;

(b) $Ind_H^G(Ind_K^H V) \simeq Ind_K^G V$ для любой цепочки подгрупп $K \subset H \subset G$.

Задача 5. Докажите, что все неодномерные неприводимые представления неабелевой группы порядка pq — индуцированные. С какой подгруппы?

Задача 6. Пользуясь двойственностью Фробениуса, постройте разложение на неприводимые для каждого представления, индуцированного с неприводимого представления подгруппы $H \subset G$, если

(a) $G = S_3$, $H = \mathbb{Z}_2$; **(b)** $G = S_3$, $H = \mathbb{Z}_3$; **(c)** $G = S_4$, $H = S_3$.

Задача 7. Вычислите характер представления группы S_5, индуцированного с неприводимого нетривиального представления циклической подгруппы $\mathbb{Z}_5$.

Задача 8. Опишите неприводимые представления группы $Heis_N$ для непростого числа N. *Подсказка:* Все эти представления — индуцированные.