Семинар 11. Немного приложений

Задача 1. Докажите, что если $\chi := \sum_i n_i\chi_i$ есть целочисленная линейная комбинация характеров группы G, $(\chi,\chi) = 1$ и $\chi(1) > 0$, то χ – характер неприводимого представления.

Задача 2. Пусть $V_1,\dots,V_k$ – полный список неприводимых представлений группы G, а $\chi_1,\dots,\chi_k$ – список соответсвующих характеров. Пусть также C – некоторый класс сопряженных элементов в G. Докажите, что выполнены следующие равенства:

$$\text{Если } g \neq e, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^{k}(\dim V_i)\chi_i(g) = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\chi_i(s)\overline{\chi_i(t)} = \begin{cases} |G|/|C|, \text{ если элементы } s,t \in C; \\ 0, \text{ если } s \text{ и } t \text{ не сопряжены.} \end{cases} \tag{2}$$

Задача 3. Пусть V – неприводимое представление группы G и C – такой класс сопряженности в группе G, что $|C|$ и $\dim V$ – взаимно простые числа и $\chi_V(C) \neq 0$. Докажите, что любой элемент $g \in C$ действует скалярной матрицей в V.

Указание: Воспользуйтесь тем, что число $\frac{|C|}{\dim V}\chi_V(C)$ – целое алгебраическое; докажите из предположения задачи, что число $\frac{\chi_V(C)}{\dim V}$ – целое алгебраическое, по модулю меньшее единицы.

Задача 4. Пусть C – класс сопряженности в G порядка p^k, где p – простое число. Докажите, что

(a) существует хотя бы одно нетривиальное неприводимое представление V, размерность которого не делится на p и значение $\chi_V(C) \neq 0$;

Указание: Воспользуйтесь формулой (1).

(b) подгруппа $H \subset G$, порожденная элементами $\{ab^{-1}|a,b \in C\}$, нормальна в G и действует тривиальным образом в V (по задаче 3).

Задача 5. Воспользуйтесь предыдущей задачей и докажите теорему Бернсайда о том, что любая группа порядка p^kq^l разрешима.

Указание: Каковы могут быть порядки классов сопряженности?

Задача 6. Пусть G неабелева группа порядка pq, где $p < q$ – простые числа. Пользуясь теорией представлений, выпишите список размерностей неприводимых представлений группы G. Докажите, в качестве следствия, что $q-1$ делится на p.

Задача 7. Докажите, что если характеристика поля $\Bbbk$ не делит порядок группы G, то для любого представления V группы G имеет место равенство $\dim Hom_G(\Bbbk[G],V) = \dim V$. Верно ли, что если представление V – неприводимо, то его кратность вхождения в леворегулярное представление $\Bbbk[G]$ равна $\dim V$?

Задача 8. Пусть V_1 и V_2 – пара перестановочных представлений построенных по действию группы G на множествах X_1 и X_2. Найдите размерность пространства сплетающих операторов $\dim Hom_G(V_1,V_2)$, если

(a) $G = S_4$, X_1 – множество вершин тетраэдра, X_2 – множество рёбер тетраэдра;

(b) $G = S_5$, $X_1 = X_2$ – множество неупорядоченных пар различных элементов множества $\{x_1,\dots,x_5\}$.

Задача 9. Постройте явно разложение в прямую сумму неприводимых леворегулярного представление S_3. Выпишите проекторы на неприводимые слагаемые.