Разное

Задача 1. Пусть $f(x)$ – неприводимый многочлен над $\mathbb{F}_q$ степени 10. В произведение скольких неприводимых многочленов раскладывается $f(x)$ над полями

(а) $\mathbb{F}_{q^2}$; **(б)** $\mathbb{F}_{q^3}$; **(в)** $\mathbb{F}_{q^5}$.

Задача 2. Пусть $f(x)$ – неприводимый многочлен над полем $\mathbb{Q}$ степени 10 с корнем α. Можно ли что-то сказать о степенях неприводимых сомножителей многочлена $f(x)$ над

(а) гаусовыми числами $\mathbb{Q}(i)$;

(б) промежуточным нормальным расширением $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$, если $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$ и $[\mathbb{F} : \mathbb{Q}] = 5$.

Задача 3. Пусть $f(x)$ – неприводимый сепарабельный многочлен над $\Bbbk$ степени p^2, такой что степень поля разложения $[\Bbbk_f : \Bbbk] = p^2 q$, где $q < p$ – пара простых чисел. Докажите, что существует промежуточное поле $\mathbb{F}$, в котором многочлен $f(x)$ имеет делитель степени p.

Задача 4. Пусть степень поля разложения $\mathbb{Q}_f$ многочлена $f(x)$ над полем $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})$ равна 5^n. Докажите, что корень многочлена $f(x)$ может быть записан в виде линейной комбинации чисел вида

$$\sqrt[5]{a_1 + b_1\sqrt[5]{a_3 + \ldots + b_n\sqrt[5]{a_n}}}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})$$

Задача 5. Пусть $\mathbb{L}$ расширение Галуа поля $\Bbbk$ степени $5^3 43^2$. Докажите, что существуют промежуточные расширения Галуа $\mathbb{F}_1/\Bbbk$ и $\mathbb{F}_2/\Bbbk$ такие что $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2 = \Bbbk$ и $\mathbb{F}_1\mathbb{F}_2 = \mathbb{L}$.

Задача 6. Пусть $\mathbb{L}/\Bbbk$ – расширение Галуа с группой G и $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ – промежуточные расширения соотетствующие подгруппам H_1 и H_2 при соответствии Галуа. Что можно сказать о подгруппах в G соответствующих промежуточным полям $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_1\mathbb{F}_2$.

Задача 7. Опишите группу Галуа над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочленов

(а) $x^5 - 3$; **(б)** $(x^4 - 2)(x^3 - 5)$; **(в)** $x^5 - 6x^4 - 3$.

Задача 8. Докажите, что многочлен $x^2 + 1$ имеет корень в конечном поле $\mathbb{F}_q$ $(char(\mathbb{F}_q) \neq 2)$ тогда и только тогда, когда $q \equiv 1 \mod 4$.

Задача 9. Пусть $\Bbbk(x) \supset \mathbb{L} \supset \Bbbk$. Докажите, что $[\Bbbk(x) : \mathbb{L}] < \infty$.