Семинар 21.

Расширения и группы Галуа

Задача 1. Пусть $\mathbb{F}$ – конечное расширение поля $\Bbbk$.

(а) Пусть задано $\mathbb{F}$-линейное отображение колец $\varphi : \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Докажите, что отображение $\nu_\varphi : \mathbb{F} \xrightarrow{a \mapsto \varphi(1 \otimes a)} \mathbb{F}$ задаёт $\Bbbk$-линейный автоморфизм поля $\mathbb{F}$.

(б) Постройте соответствие между $\Bbbk$-линейными автоморфизмами поля $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}$-линейными гомоморфизмами колец $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F} \to \mathbb{F}$.

(в) Докажите, что порядок группы автоморфизмов $Aut_{\Bbbk}(\mathbb{F})$ не превосходит степени расширения $[\mathbb{F} : \Bbbk]$.

(г) Докажите, что (конечное) расширение $\mathbb{F}/\Bbbk$ является нормальным и сепарабельным тогда и только тогда, когда кольцо $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}$ изоморфно (конечной) прямой сумме полей $\mathbb{F}$.

Задача 2. Опишите группу автоморфизмов $Aut_{\Bbbk}(\mathbb{F})$ и простые идеалы в тензорном произведение $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}$ для расширения полей

(а) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\Bbbk = \mathbb{R}$; **(б)** $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{1}]$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$; **(в)** $\mathbb{F} = \mathbb{F}_4$, $\Bbbk = \mathbb{F}_2$.

Задача 3. Докажите, что следующие расширения полей являются расширениями Галуа и вычислите количество промежуточных полей в этих расширениях

(а) $\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}]/\mathbb{Q}$, где $a_1, \ldots, a_n$ – различные взаимнопростые числа;

(б) $\mathbb{F}_{p^{10}}/\mathbb{F}_p$;

(в) $\mathbb{Q}[\xi]/\mathbb{Q}$, где ξ – примитивный корень 15-ой степени из единицы.

(г) $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, i]/\mathbb{Q}$.