Семинар 20.

Нормальные расширения

Задача 1. Какие из следующих расширений поля $\Bbbk$, полученных присоединением одного из корней многочлена $f(x)$, нормальны?

(а) $f(x) = x^2 - 3$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$; **(б)** $f(x) = x^4 - 3$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$; **(в)** $f(x) = x^4 - 3$, $\Bbbk = \mathbb{Q}[i]$;
(г) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$; **(д)** $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\Bbbk = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$;
(е) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\Bbbk = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$; **(ж)** $f(x) = x^3 + x + 1$, $\Bbbk = \mathbb{F}_2$;
(з) $f(x) = x^4 + x + 1$, $\Bbbk = \mathbb{F}_4$; **(и)** $f(x) = x^3 - y$, $\Bbbk = \mathbb{C}(y)$;
(к) $f(x) = x^3 + yx + yz$, $\Bbbk = \mathbb{C}(y, z)$.

Для каждого из указанных расширений вычислите **(а)** его степень; **(б)** степень расширения поля разложения многочлена $f(x)$; **(в)** группу автоморфизмов поля разложения; **(г)** группу автоморфизмов исходного расширения.

Задача 2. Пусть $P(x)$ – неприводимый кубический многочлен над $\mathbb{Q}$, имеющий ровно один вещественный корень.

(а) Найдите степень поля разложения этого многочлена.
(б) Найдите группу автоморфизмов этого поля разложения.

Задача 3.

(а) Пусть $P(x)$ – неприводимый кубический многочлен над $\mathbb{Q}$. Какой может быть группа Галуа поля разложения этого многочлена? Приведите примеры для каждого случая.

(б) Пусть $P(x)$ – неприводимый многочлен 4 степени над $\mathbb{Q}$. Какой может быть группа Галуа поля разложения этого многочлена? Приведите примеры для каждого случая.

Задача 4. Пусть Γ – конечная группа. Постройте расширение Галуа какого-нибудь поля с группой Галуа Γ.

Композиты расширений

Задача 5. Постройте отображения из (конечных) расширений $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ поля $\Bbbk$ в их тензорное произведение $\mathbb{F}_1 \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}_2$. Пусть R – факторкольцо тензорного произведения $\mathbb{F}_1 \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}_2$ по своему нильрадикалу. Докажите, что

(а) R изоморфно конечной прямой сумме полей $\mathbb{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{L}_n$. *Каждое из полей $\mathbb{L}_i$ называется композитом расширений $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$.*

(б) для каждого композита $\mathbb{L}_i$ существуют нетривиальные $\Bbbk$-линейные отображения

$$\varphi_i : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{L}_i, \quad \psi_i : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{L}_i, \quad \phi_i : \mathbb{F}_1 \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}_2 \to \mathbb{L}_i;$$

(в) любое поле $\mathbb{L}$, которое является расширением $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$ одновременно является расширением одного из композитов $\mathbb{L}_i$. Иными словами, наличие $\Bbbk$-линейных вложений $\varphi : \mathbb{F}_1 \hookrightarrow \mathbb{L}$ и $\psi : \mathbb{F}_2 \hookrightarrow \mathbb{L}$ гарантирует существование вложения одного из композитов $\mathbb{L}_i \hookrightarrow \mathbb{L}$.

(г) предположим, что поле $\mathbb{L}$ содержит тройку подполей $\mathbb{F}_1$,$\mathbb{F}_2$ и $\Bbbk$, таких, что $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$ порождают $\mathbb{L}$, как кольцо, а пересечение $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$ содержит подполе $\Bbbk$. Докажите, что $\mathbb{L}$ – композит расширений $\mathbb{F}_1/\Bbbk$ и $\mathbb{F}_2/\Bbbk$.

Задача 6. Опишите композиты расширений

(а) $\mathbb{Q}[\sqrt{3}], \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ над $\mathbb{Q}$;
(б) $\mathbb{Q}[\sqrt{6} + \sqrt{10}], \mathbb{Q}[\sqrt{15}]$ над $\mathbb{Q}$;
(в) $\mathbb{F}_p(x), \mathbb{F}_{p^2}(x)$ над $\mathbb{F}_p(x^p)$
(г) $\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_{p^m}$ над $\mathbb{F}_p$.

Задача 7. Пусть $\mathbb{F}_1$ – расширение поля $\Bbbk$, полученное присоединением корня неприводимого многочлена $f(x)$. Опишите композиты расширений $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$, если известно, что многочлен $f(x)$ имеет следующее разложение на неприводимые в поле $\mathbb{F}_2$:

$$f(x) = p_1(x)^{n_1} \ldots p_s(x)^{n_s}$$