Семинар 19.

Немного о тензорном произведении

Задача 1. Докажите, что тензорное произведение над $\Bbbk$
(а) колец многочленов над $\Bbbk$ есть кольцо многочленов над $\Bbbk$;
(б) факторколец многочленов над $\Bbbk$ есть факторкольцо многочленов над $\Bbbk$.

Задача 2. Сформулируйте достаточные условия на поля (алгебры) A, B, C, так чтобы существовали следующие канонические изоморфизмы алгебр:
(а) $(A \oplus B) \otimes_{\Bbbk} C \simeq A \otimes_{\Bbbk} C \oplus B \otimes_{\Bbbk} C$;
(б) $A \otimes_B (B \otimes_{\Bbbk} C) = A \otimes_{\Bbbk} C$.

Задача 3. Предъявите базис, как векторного пространства над полем скаляров в тензорном произведение
(а) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; **(б)** $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$; **(в)** $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$; **(г)** $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
(д) $\mathbb{F}_{p^2} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^2}$; **(е)** $\mathbb{F}_p(x) \otimes_{\mathbb{F}_p(x^p)} \mathbb{F}_p(x)$.
В каждом из пунктов опишите умножение и проверьте, является ли соответствующая алгебра полем? прямой суммой полей?

Задача 4. Рассмотрим расширение $\mathbb{F}$ поля $\Bbbk$, полученное присоединением корня неприводимого многочлена $f(x)$. Докажите, что тензорное произведение $\mathbb{L} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}$ является алгеброй над большим полем $\mathbb{L}$, изоморфной $\mathbb{L}[x]/(f(x))$. Иными словами, докажите изоморфизм алгебр:

$$\mathbb{L} \otimes_{\Bbbk} (\Bbbk[x]/(f(x))) \simeq \mathbb{L}[x]/(f(x)).$$

Верно ли, что указанный выше изоморфизм алгебр существует, если
(а) $f(x)$ – приводим; **(б)** $\mathbb{L}$ – алгебра над $\Bbbk$.

Задача 5. Верно ли, что
(а) если в предыдущей задаче многочлен $f(x)$ – сепарабельный (то есть не имеет кратных корней в замыкании $\bar{\Bbbk}$), то тензорное произведение $\mathbb{L} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}$ является прямой суммой полей.
(б) тензорное произведение $\mathbb{F}_1 \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}_2$ сепарабельных расширений $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ поля $\Bbbk$ является прямой суммой полей.

Немного о конечномерных алгебрах

Задача 6. Пусть R – конечномерная коммутативная алгебра над полем $\Bbbk$. Докажите, что
(а) если R без делителей нуля, то R содержит единицу;
(б) если R без делителей нуля, то R — поле;
(в) если R без нильпотентов, то любой минимальный идеал $I \subset R$ – поле.
(г) любой простой идеал в R – максимальный.

Задача 7. Пусть R – коммутативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$. Пусть элемент $e \in R$ – идемпотент, то есть $e^2 = e$. Докажите, что
(а) $1 - e$ – идемпотент и R изоморфна прямой сумме своих подалгебр eR и $(1-e)R$;
(б) произведение идемпотентов – идемпотент;
(в) Если e – неразложимый идемпотент (то есть не представляется в виде суммы двух идемпотентов, произведение которых равно нулю) и R – конечномерная полупростая алгебра, то eR – поле.

Задача 8. Докажите, что прямая сумма конечных расширений поля $\Bbbk$ яляется коммутативной полупростой $\Bbbk$-алгеброй. Верно ли обратное, если
(а)* $char \Bbbk = 0$? **(б)*** $char \Bbbk > 2$? **(в)*** $\Bbbk$ – любое?

Задача 9. Предъявите n идемпотентов, n простых идеалов и n подполей в кольце $\Bbbk[x]/(f_1(x) \dots f_n(x$ где $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ – набор из n различных неприводимых многочленов.