Семинар 18. Алгебраическое замыкание, гомоморфизмы полей, нормальные и сепарабельные расширения

Задача 1. Бесконечномерно ли алгебраическое замыкание поля:
(а) $\mathbb{Q}$; **(б)** $\mathbb{F}_q$; **(в)** $\Bbbk = \mathbb{Q}[i]$; **(г)** $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Задача 2. Опишите необходимое и достаточное условие на порядки степеней $[\mathbb{F}_1 : \Bbbk]$, $[\mathbb{F}_2 : \Bbbk]$ конечных расширений конечного поля $\Bbbk$, так чтобы существовал нетривиальный гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$.

Задача 3. Предъявите гомоморфизм следующих расширений полей, если таковой существует:
(а) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]$ над $\mathbb{Q}$;
(б) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{5}]$ над $\mathbb{Q}$;
(в) $\mathbb{F}_5[x]/(x^5-x-1) \longrightarrow \mathbb{F}_5[x]/(x^5-x-3)$ над $\mathbb{F}_5$.
(г) $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{3}] \longrightarrow \mathbb{Q}[i\sqrt[4]{3}]$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 4. Докажите, что
(а) поле $\mathbb{C}$ изоморфно бесконечному числу своих собственных подполей;
(б) группа автоморфизмов поля $\mathbb{C}$ несчетна.

Задача 5. Предъявите примитивный элемент в поле разложения многочлена:
(а) $x^{10}-1 \in \mathbb{Q}[x]$;
(б) $x^5-x-1 \in \mathbb{F}_5[x]$;
(в) $x^5-t \in \mathbb{F}_5(t^p)[x]$.

Задача 6. Пусть α – алгебраическое над $\Bbbk$, $\mathbb{L} := \Bbbk[\alpha]$ и $\mu_\alpha(x)$ – минимальный многочлен α над $\Bbbk$. Докажите, что всякое промежуточное поле $\Bbbk \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ порождается над $\Bbbk$ коэффициентами некоторого делителя $\mu_\alpha(x)$, рассматриваемого, как многочлен из $\mathbb{L}[x]$. В частности, промежуточных полей лишь конечное число.

Задача 7. Покажите, что расширение $\Bbbk(x,y)/\Bbbk(x^p,y^p)$ – конечно и в случае $char(\Bbbk) = p$ не является простым расширением. Предъявите бесконечное количество промежуточных полей.

Задача 8. Выясните, какие из следующих расширений полей являются нормальными и какие сепарабельными:
(а) $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$;
(б) $\mathbb{F}_p(x)/\mathbb{F}_p(x^p)$;
(в) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]/\mathbb{Q}$;
(г) $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{3}]/\mathbb{Q}$;
(д) $\mathbb{Q}[\exp\frac{\pi i}{10}, \sqrt[20]{5}]/\mathbb{Q}[i]$;