Семинар 16. Примеры расширений полей

Задача 1. Пусть R – алгебра над полем $\Bbbk$, содержащая расширение поля $\mathbb{F} \supset \Bbbk$. Докажите, что $\dim_{\Bbbk}(R)$ делится на $[\mathbb{F} : \Bbbk]$.

Задача 2. Пусть α – элемент алгебры A над полем $\Bbbk$. Верно ли, что

(a) α – не является алгебраическим над $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда $\Bbbk[a]$ изоморфно кольцу многочленов $\Bbbk[x]$;

(b) α – алгебраическое над $\Bbbk$, если $\Bbbk[a] \simeq \Bbbk[x]/(\mu_\alpha(x))$ для однозначно определённого унитарного многочлена $\mu_\alpha(x)$;

(c) если все элементы из A алгебраичны, то A – поле в том и только в том случае, когда $\forall \alpha \in A$ минимальный многочлен $\mu_\alpha(x)$ – неприводим.

Задача 3. Докажите, что для алгебраического расширения полей $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ соответствующее расширение полей рациональных функций $\mathbb{F}(x) \supset \Bbbk(x)$ тоже алгебраично и степени этих расширений совпадают.

Задача 4. Найдите минимальные многочлены для элементов:

(a) $\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$; **(b)** $\sqrt[5]{7}$ над $\mathbb{Q}$; **(c)** $\sqrt{2+3\sqrt{3}}$ над $\mathbb{Q}$; **(d)** $5+3i$ над $\mathbb{R}$; **(e)** $5-3i$ над $\mathbb{C}$; **(f)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$; **(g)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{5}]$; **(h)** $x+2y$ над $\mathbb{Q}(x^2+y^2, xy)$.

Задача 5. Вычислите степень поля разложения над $\mathbb{Q}$ многочлена:

(a) $\frac{3}{5}x+7$; **(b)** x^2-2; **(c)** $(x^2-a)(x^2-b)$; **(d)** x^3-1; **(e)** x^p-1 для простого числа p; **(f)*** x^p-a, где p – простое, $a \in \mathbb{Q}$ и не является p-ой степенью в $\mathbb{Q}$.

Задача 6. Вычислите степень поля разложения многочлена:

(a) $x^n - a_1x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n \in \Bbbk(a_1, \ldots, a_n)[x]$;

(b) $x^p - a \in \mathbb{F}_p(a)[x]$.

Задача 7. Пусть поле $\Bbbk$ -бесконечно. Пусть $\mu_\alpha(x)$ и $\mu_\beta(x)$ – минимальные многочлены алгебраических над $\Bbbk$ чисел α,β. Докажите, что если $\mu_\alpha(x)$ и $\mu_\beta(x)$ не имеют кратных корней, то найдется такое число $c \in \Bbbk$, что $\Bbbk[\alpha + c\beta]$ совпадает с $\Bbbk[\alpha, \beta]$.

Задача 8. Предъявите примитивный элемент в расширении полей, а также найдите степень данного расширения:

(a) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] \supset \mathbb{Q}$; **(b)** $\mathbb{Q}(x)[\sqrt{2}, \sqrt{5}] \supset \mathbb{Q}(x)$; **(c)** $\mathbb{Q}[e^{\frac{2\pi i}{15}}, e^{\frac{2\pi i}{21}}] \supset \mathbb{Q}$.