Семинар 15. Расширение полей

Задача 1. Докажите, что кольцо многочленов факториально.

Задача 2. Пусть $f(x) \in \Bbbk[x]$ – неприводимый многочлен, а $g(x)$ – многочлен, который не делится на f. Верно ли, в факторкольце $\Bbbk[x]/(f(x))$ умножение на $g(x)$ является
(a) мономорфизмом, **(b)** эпиморфизмом, **(c)** изоморфизмом.

Задача 3. Докажите, что в области главных идеалов следующие типы идеалов совпадают:
(a) ненулевой простой идеал,
(b) максимальный идеал,
(c) идеал, порождаемый неприводимым элементом.

Задача 4. Является ли $\mathbb{F}$ расширением поля $\Bbbk$, если
(a) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{3} + \sqrt{5}]$, $\Bbbk = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$;
(c) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 3x - 3)$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;
(d) $\mathbb{F} = \mathbb{R}[x]/(x^4 - 4x + 6)$, $\Bbbk = \mathbb{R}$;
(e) $\mathbb{F}$ – тело кватернионов, $\Bbbk = \mathbb{R}$;
(f) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\pi]$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;
(g) $\mathbb{F} = \Bbbk(x)$ – кольцо рациональных функций;
(h) $\mathbb{F} = \Bbbk[[x, x^{-1}]$ – кольцо рядов Лорана;
(i) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(x)$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(x^4 + 3x^2 + 3)$;
(j) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(x, y)$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(x^2 + y^2, xy)$;
(k) $\mathbb{F} = \mathbb{C}(x)[y]/(y^2 - x^3 - 5)$, $\mathbb{C}(x)$.
Про каждое из расширений полей выясните, является оно алгебраическим или трансцендентным. Какова его степень (для конечного расширения) и степень трансцендентности (для трансцендентных расширений)?

Задача 5. Приведите пример расширения полей $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ и пример отображения между векторными пространствами над полем $\mathbb{F}$, которое $\Bbbk$-линейно, но не $\mathbb{F}$-линейно.

Задача 6. **(a)** Верно ли, что любое конечное расширение поля – алгебраично?
(b) Верно ли, что любое алгебраичное расширение поля – конечно?

Задача 7. Верно ли, что элемент α является алгебраическим над полем $\Bbbk$, если
(a) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;
(b) $\alpha = 5x^2 + 7\pi$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(x)$.

Семинар 15. Расширение полей

Задача 1. Докажите, что кольцо многочленов факториально.

Задача 2. Пусть $f(x) \in \Bbbk[x]$ – неприводимый многочлен, а $g(x)$ – многочлен, который не делится на f. Верно ли, в факторкольце $\Bbbk[x]/(f(x))$ умножение на $g(x)$ является

(a) мономорфизмом, **(b)** эпиморфизмом, **(c)** изоморфизмом.

Задача 3. Докажите, что в области главных идеалов следующие типы идеалов совпадают:

(a) ненулевой простой идеал,

(b) максимальный идеал,

(c) идеал, порождаемый неприводимым элементом.

Задача 4. Является ли $\mathbb{F}$ расширением поля $\Bbbk$, если

(a) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{5}]$, $\Bbbk = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$;

(c) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[x]/(x^3-3x-3)$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;

(d) $\mathbb{F} = \mathbb{R}[x]/(x^4-4x+6)$, $\Bbbk = \mathbb{R}$;

(e) $\mathbb{F}$ – тело кватернионов, $\Bbbk = \mathbb{R}$;

(f) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\pi]$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;

(g) $\mathbb{F} = \Bbbk(x)$ – кольцо рациональных функций;

(h) $\mathbb{F} = \Bbbk[[x, x^{-1}]$ – кольцо рядов Лорана;

(i) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(x)$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(x^4+3x^2+3)$;

(j) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(x,y)$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(x^2+y^2, xy)$;

(k) $\mathbb{F} = \mathbb{C}(x)[y]/(y^2-x^3-5)$, $\mathbb{C}(x)$.

Про каждое из расширений полей выясните, является оно алгебраическим или трансцендентным. Какова его степень (для конечного расширения) и степень трансцендентности (для трансцендентных расширений)?

Задача 5. Приведите пример расширения полей $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ и пример отображения между векторными пространствами над полем $\mathbb{F}$, которое $\Bbbk$-линейно, но не $\mathbb{F}$-линейно.

Задача 6. **(a)** Верно ли, что любое конечное расширение поля – алгебраично?

(b) Верно ли, что любое алгебраичное расширение поля – конечно?

Задача 7. Верно ли, что элемент α является алгебраическим над полем $\Bbbk$, если

(a) $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$;

(b) $\alpha = 5x^2+7\pi$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(x)$.