Контрольная 5. 4 декабря 2015.

Вариант I.

Задача 1. Опишите неприводимые представления абелевой группы $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Задача 2. Пусть G – полупрямое произведение циклической группы $\mathbb{Z}_3$ и группы H, где $\mathbb{Z}_3$ действует на H перестановками сомножителей по циклу. Иными словами, группа G может быть задана 4 образующими s, x_1, x_2, x_3, соотношения на которые имеют вид:

$$s^3 = x_i^2 = e, \quad x_i x_j = x_j x_i,$$
$$s x_i s^{-1} = x_{((i+1) \bmod 3)}.$$

Пусть $\rho_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ – одномерное представление подгруппы H, заданное формулой $\rho_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}(x_i) = \epsilon_i Id$, где $\epsilon_i \in \{1, -1\}$.

(a) выберите базис в пространстве индуцированного представления $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} = Ind_H^G \rho_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ и опишите матрицы действия образующих группы G в этом базисе.

(b) Опишите разложение на неприводимые представления группы H, полученное путём ограничения индуцированного представления $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$. То есть опишите $Res_H^G \tau_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$.

(c) Для каких наборов $(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3)$ индуцированное представление $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ неприводимо?
Принимается любое решение: используя двойственность Фробениуса, вычисление характера или просто объяснение из линейной алгебры

(d) Как связаны между собой тройки $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, для которых существует нетривиальный сплетающий оператор между $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ и $\tau_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$?

(e) Для каких пар комплексных чисел α и β существует одномерное представление группы G, в котором s действует умножением на α, а все x_i действуют умножением на β?

(f) Перечислите все неприводимые представления группы G.

Контрольная 5. 28 ноября 2015.

Вариант II.

Задача 1. Опишите неприводимые представления абелевой группы $H = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Задача 2. Пусть G – полупрямое произведение циклической группы $\mathbb{Z}_2$ и группы H, где $\mathbb{Z}_2$ действует на H перестановками сомножителей. Иными словами, группа G может быть задана 3 образующими s, x_1, x_2, соотношения на которые имеют вид:

$$s^2 = x_1^3 = x_2^3 = e, \quad x_1 x_2 = x_2 x_1,$$
$$s x_1 s^{-1} = x_2.$$

Пусть $\rho_{\epsilon_1\epsilon_2}$ – одномерное представление подгруппы H, заданное формулой $\rho_{\epsilon_1\epsilon_2}(x_i) = \epsilon_i Id$, где $\epsilon_i \in \{1, \exp\frac{2\pi i}{3}, \exp\frac{-2\pi i}{3}\}$.

(a) выберите базис в индуцированном представлении $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2} = Ind_H^G \rho_{\epsilon_1\epsilon_2}$ и опишите матрицы действия образующих группы G в этом базисе.

(b) Опишите разложение на неприводимые представления группы H, полученное путём ограничения индуцированного представления $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2}$. То есть опишите $Res_H^G \tau_{\epsilon_1\epsilon_2}$.

(c) Для каких наборов $(\epsilon_1\epsilon_2)$ представление $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2}$ неприводимо?
Принимается любое решение: используя двойственность Фробениуса, вычисление характера или просто объяснение из линейной алгебры

(d) Как связаны между собой пары $(\epsilon_1\epsilon_2)$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, для которых существует нетривиальный сплетающий оператор между $\tau_{\epsilon_1\epsilon_2}$ и $\tau_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$?

(e) Для каких пар комплексных чисел α и β существует одномерное представление группы G, в котором s действует умножением на α, а все x_i действуют умножением на β?

(f) Перечислите все неэквивалентные неприводимые представления группы G.