Вариант I.

Группа G задана тремя образующими a, b, c и соотношениями $a^5 = b^5 = c^5 = e,\ \ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = cba$. Наша цель – изучить неприводимые комплексные представления группы G.

Задача 1. Покажите, что любое комплексное конечномерное представление (V, ρ) группы G имеет такой вектор v, что для некоторых комплексных чисел α и γ выполнены равенства $\rho(a)v = \alpha v$ и $\rho(c)v = \gamma v$; чему могут быть равны числа α и γ?

Задача 2. Покажите, что оператор $\rho(b)$ переводит в себя множество общих собственных векторов операторов $\rho(a)$ и $\rho(c)$ (со всевозможными собственными значениями). Как меняются собственные значения $\rho(a)$ и $\rho(c)$ при применении оператора $\rho(b)$?

Задача 3. Для каждой допустимой пары (α, γ) (см. задачу 1) постройте представление $\rho_{\alpha,\gamma}$ группы G в пространстве $\mathbb{C}^5$, обладающее следующими свойствами: а) первый элемент стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^5$ является собственным вектором для $\rho_{\alpha,\gamma}(a)$ и $\rho_{\alpha,\gamma}(c)$ с собственными значениями соответственно α и γ; б) на стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^5$ оператор $\rho_{\alpha,\gamma}(b)$ действует циклической перестановкой. (Опишите матрицы $\rho_{\alpha,\gamma}(a)$, $\rho_{\alpha,\gamma}(b)$ и $\rho_{\alpha,\gamma}(c)$ и проверьте соотношения.)

Задача 4. Докажите, что представление $\rho_{\alpha,\gamma}$ неприводимо, если $\gamma \neq 1$.

Задача 5. Вычислите $\dim \operatorname{Hom}(\rho_{\alpha,\gamma}, \rho_{\alpha',\gamma'})$ в зависимости от α, α', γ, γ'.

Задача 6. Найдите индекс коммутанта группы G.

Задача 7. Опишите все одномерные неприводимые представления группы G. Сколько их?

Задача 8. Докажите, что любое неприводимое представление группы G либо одномерно, либо изоморфно одному из $\rho_{\alpha,\gamma}$.

Задача 9. Подведите итог: Сколько всего неизоморфных неприводимых представлений группы G? Каковы их размерности?

Вариант II.

Группа G задана тремя образующими a, b, c и соотношениями $a^7 = b^7 = c^7 = e,\ \ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = cba$. Наша цель – изучить неприводимые комплексные представления группы G.

Задача 1. Покажите, что любое комплексное конечномерное представление (V, ρ) группы G имеет такой вектор v, что для некоторых комплексных чисел α и γ выполнены равенства $\rho(a)v = \alpha v$ и $\rho(c)v = \gamma v$; чему могут быть равны числа α и γ?

Задача 2. Покажите, что оператор $\rho(b)$ переводит в себя множество общих собственных векторов операторов $\rho(a)$ и $\rho(c)$ (со всевозможными собственными значениями). Как меняются собственные значения $\rho(a)$ и $\rho(c)$ при применении оператора $\rho(b)$?

Задача 3. Для каждой допустимой пары (α, γ) (см. задачу 1) постройте представление $\rho_{\alpha,\gamma}$ группы G в пространстве $\mathbb{C}^7$, обладающее следующими свойствами: а) первый элемент стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^7$ является собственным вектором для $\rho_{\alpha,\gamma}(a)$ и $\rho_{\alpha,\gamma}(c)$ с собственными значениями соответственно α и γ; б) на стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^7$ оператор $\rho_{\alpha,\gamma}(b)$ действует циклической перестановкой. (Опишите матрицы $\rho_{\alpha,\gamma}(a)$, $\rho_{\alpha,\gamma}(b)$ и $\rho_{\alpha,\gamma}(c)$ и проверьте соотношения.)

Задача 4. Докажите, что представление $\rho_{\alpha,\gamma}$ неприводимо, если $\gamma \neq 1$.

Задача 5. Вычислите $\dim \operatorname{Hom}(\rho_{\alpha,\gamma}, \rho_{\alpha',\gamma'})$ в зависимости от α, α', γ, γ'.

Задача 6. Найдите индекс коммутанта группы G.

Задача 7. Опишите все одномерные неприводимые представления группы G. Сколько их?

Задача 8. Докажите, что любое неприводимое представление группы G либо одномерно, либо изоморфно одному из $\rho_{\alpha,\gamma}$.

Задача 9. Подведите итог: Сколько всего неизоморфных неприводимых представлений группы G? Каковы их размерности?