3. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ.

Решения задач, помеченных знаком (П), принимаются только письменно. Решения задач, помеченных знаком ^{0}, принимаются только устно, и их решение не влияет на оценку за листок. Контрольный срок листка — 21 октября 2014 г.; задачи, помеченные знаком (П), имеют свой собственный контрольный срок.

Задача 1. Существует ли отображение $f : S^2 \to \mathbb{T}^2$ степени 4? А отображение $f : \mathbb{T}^2 \to S^2$?

Указание. $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$, поэтому понятие степени отображения здесь имеет смысл. Выражение степени через сумму знаков прообразов тоже верно — подумайте, почему!

Задача 2^0. а) Докажите, что комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфна двумерной сфере. б) Пусть P — многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Какие значения $c \in \mathbb{C}$ являются критическими для P? Докажите, что знак любой некритической точки для P положителен. в) Докажите основную теорему алгебры: для всякого $c \in \mathbb{C}$ существует $z \in \mathbb{C}$ такое, что $P(z) = c$. г) Решите аналог задачи 2б для функции $E(z) = \exp z$. Докажите, что аналог утверждения 2в для нее неверен. Где не проходит доказательство?

Задача 3. Напомним, что в прошлом семестре степенью непрерывного отображения $f : S^1 \to S^1$ было названо число $F(1) - F(0) \in \mathbb{Z}$, где $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — отображение, для которого $E \circ F = f \circ E$; здесь $E : \mathbb{R} \to S^1$ — универсальное накрытие, действующее по формуле $E(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Докажите, что степень в этом смысле и стандартная "гомологическая" степень отображения f равны.

Задача 4. Пусть $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — дробно-рациональная функция, и $a \in \mathbb{C}P^1$. Назовем индексом точки a степень отображения $\gamma_a : S^1 \to S^1$, заданного формулой $\gamma_a(w) = f(a + \varepsilon w)/|f(a + \varepsilon w)|$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (здесь $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$). а) Докажите, что индекс не зависит от числа $\varepsilon > 0$ (если оно достаточно мало). б^0) Определите индекс точки $a = \infty$ и индекс полюса функции f (точки a, в которой $f(a) = \infty$). в) Выразите индекс произвольной точки a (включая $a = \infty$) через характеристики функции f. г) Вычислите сумму индексов всех точек $a \in \mathbb{C}P^1$ и докажите, что она не зависит от выбора функции f.

Задача 5. Пусть $\omega_1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ и $\omega_2 = \{(0, y, z) \mid ((y - 1)^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ — две окружности в $\mathbb{R}^3$ ("зацепление Хопфа"). Отображение $f : \omega_1 \times \omega_2 \to S^2$ задается равенством $f(u, v) = (u - v)/|u - v|$. Вычислите степень отображения f. Докажите, что зацепление Хопфа нельзя расцепить: не существует семейств непрерывных отображений $f_t, g_t : S^1 \to \mathbb{R}^3$, $0 \le t \le 1$, таких что $f_0(S^1) = \omega_1$, $g_0(S^1) = \omega_2$, $f_1(S^1)$ и $g_1(S^1)$ — две окружности в $\mathbb{R}^3$, лежащие далеко друг от друга (расстояние между центрами больше удвоенной суммы радиусов), и при любом t образы $f_t(S^1)$ и $g_t(S^1)$ не пересекаются.

Задача 6. Отображение $f : S^k \to S^l$ называется нечетным, если $f(-x) = -f(x)$. а) Докажите, что степень гладкого нечетного отображения $f : S^n \to S^n$ нечетна. б) Докажите аналогичное утверждение для непрерывных нечетных отображений. в) Докажите, что не существует гладкого (используя задачу 6а) или непрерывного (используя задачу 6б) нечетного отображения $f : S^n \to S^{n-1}$. г) Докажите, что на Земле в любой момент времени есть две диаметрально противоположные точки, температура и атмосферное давление в которых совпадают.

Указание. В задаче 6б приблизьте непрерывное отображение гладкими. В задаче 6в рассмотрите ограничение отображения f на экватор сферы S^n. В задаче 6г рассмотрите отображение $x \mapsto f(x) - f(-x)$, где x — точка Земли, а $f(x)$ — пара (температура в точке x, давление в точке x).

Задача 7 (П, 21.10.14)**.** Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, и 0 — точка минимума и изолированная критическая точка (при достаточно малом по модулю $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, ее производная $f'(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$ отлична от нуля). Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Отображение $\Phi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ определяется равенством $\Phi(y) = f'(\varepsilon y)/|f'(\varepsilon y)|$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Докажите, что степень отображения Φ равна 1.