Каждый сдающий индивидуально получает 7 задач из приведенного ниже списка. Из этих 7 задач для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить 6 задач. В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях.

1. Придумайте пример хаусдорфовых топологических пространств X и Y, для которых $\mathscr{B}or(X)\otimes\mathscr{B}or(Y)\neq\mathscr{B}or(X\times Y)$.

2. Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве $(X,\mathscr{A})$. Докажите, что $\{x\in X:\exists\lim_{n\to\infty}f_n(x)\}\in\mathscr{A}$.

3. Пусть μ — конечная положительная σ-аддитивная мера на алгебре множеств $\mathscr{A}\subset 2^X$. Докажите, что множество $A\subset X$ μ-измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(A)+\mu^*(X\setminus A)=\mu(X)$.

4. Пусть $(X,\mathscr{A},\mu)$ — пространство с мерой, $\mathscr{N}=\{A\in\mathscr{A}:\mu(A)=0\}$. Положим

$$\bar{\mathscr{A}}=\big\{A\cup B: A\in\mathscr{A},\ B\subset N \text{ для некоторого } N\in\mathscr{N}\big\}.$$

Докажите, что
(a) $\bar{\mathscr{A}}$ — σ-алгебра, и μ единственным образом продолжается до σ-аддитивной меры $\bar\mu$ на $\bar{\mathscr{A}}$;
(b) если μ σ-конечна, то $\bar{\mathscr{A}}$ совпадает с σ-алгеброй всех μ-измеримых множеств, и $\bar\mu=\mu^*$ на $\bar{\mathscr{A}}$, но в общем случае эти σ-алгебры различны.

5. Пусть X — множество, $\mathscr{F}$ — некоторое семейство его подмножеств, $\varnothing\in\mathscr{F}$. Положим $\mathscr{B}_0=\mathscr{F}\cup\{X\setminus A: A\in\mathscr{F}\}$, $\mathscr{B}_1=\Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i : A_i\in\mathscr{B}_0\Big\}$, $\mathscr{B}_2=\Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i : A_i\in\mathscr{B}_1\Big\}$, и т.д. Более общим образом, для каждого счетного ординала α положим $\mathscr{B}_\alpha=\Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i : A_i\in\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{B}_\beta\Big\}$. Наконец, положим $\mathscr{B}=\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathscr{B}_\alpha$, где ω_1 — первый несчетный ординал.
(a) Докажите, что $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, порожденная $\mathscr{F}$. В частности, если X — топологическое пространство и $\mathscr{F}$ — семейство всех его открытых подмножеств, то $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра.
(b) Докажите, что σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума c, а σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^n$ — мощность 2^c. В частности, не все измеримые подмножества $\mathbb{R}^n$ являются борелевскими.

6. Пусть $A\subset\mathbb{R}$ — множество положительной меры. Докажите, что множество $A-A=\{a-b:a,b\in A\}$ содержит окрестность нуля.

7. Пусть $A\subset\mathbb{R}$ — счетное плотное множество, $B\subset\mathbb{R}$ — измеримое множество. Докажите, что либо множество $A+B=\{a+b:a\in A,\ b\in B\}$, либо его дополнение $\mathbb{R}\setminus(A+B)$ имеет меру нуль.

8. (a) Постройте пример гомеоморфизма $f\colon[0,1]\to[0,1]$, переводящего некоторое множество меры 0 в измеримое множество положительной меры.
(b) С помощью п. (a) докажите существование измеримых по Лебегу неборелевских множеств на прямой.

9. **(a)** Постройте пример гомеоморфизма $f\colon [0,1] \to [0,1]$, переводящего некоторое измеримое по Лебегу множество в неизмеримое.
(b) Верно ли, что композиция двух измеримых по Лебегу функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ измерима по Лебегу?

10. Приведите пример, показывающий, что теорема о монотонной сходимости неверна без предположения о монотонности, а теорема о мажорированной сходимости неверна без предположения о существовании интегрируемой мажоранты.

11. Приведите пример, показывающий, что лемма Фату неверна без предположения о неотрицательности функций.

12. Приведите пример ограниченной измеримой по Лебегу функции на $[0,1]$, не совпадающей почти всюду ни с какой функцией, интегрируемой по Риману.

13. Приведите пример непрерывной, но не интегрируемой по Лебегу функции на $[0,+\infty)$, для которой существует несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

14. Пусть $c\colon [0,1] \to [0,1]$ — канторова лестница. Вычислите интегралы: **(a)** $\int_0^1 c(x)\,dx$; **(b)** $\int_0^1 x\,d\mu_c(x)$, где μ_c — мера Лебега–Стилтьеса на $[0,1]$, порожденная функцией c.

15. Приведите пример поточечно сходящейся к нулю последовательности измеримых функций на прямой, не сходящейся никуда по мере.

16. Приведите пример последовательности ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к нулю по мере, но не сходящейся никуда по L^1-норме.

17. Приведите пример последовательности ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к нулю по L^1-норме, но не сходящейся ни в одной точке.

18. Пусть (f_n) и (g_n) — последовательности измеримых функций на пространстве с мерой (X,μ), сходящиеся по мере к измеримым функциям f и g соответственно. Докажите, что $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

19. Пусть (f_n) и (g_n) — последовательности измеримых функций на пространстве с конечной мерой (X,μ), сходящиеся по мере к измеримым функциям f и g соответственно. Докажите, что $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$.

20. Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций на пространстве с мерой (X,μ). Предположим, что для некоторой измеримой функции f и для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha_n\} \leqslant \beta_n$, где (α_n) и (β_n) — последовательности положительных чисел, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\sum_n \beta_n < \infty$. (Грубо говоря, это означает, что (f_n) «очень быстро сходится по мере» к f.) Докажите, что $f_n \to f$ почти всюду.

21. Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой. Обозначим через $L^0(X,\mu)$ пространство классов эквивалентности (здесь эквивалентность — это равенство μ-п.в.) измеримых функций на X. Зафиксируем неубывающую ограниченную непрерывную функцию $\psi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, такую, что $\psi(0) = 0$, ψ строго возрастает в некоторой окрестности нуля, и $\psi(s+t) \leqslant \psi(s) + \psi(t)$ для всех s,t. (Например, можно положить $\psi(t) = t/(1+t)$ или $\psi(t) = \max\{1,t\}$.) Докажите, что формула $\rho(f,g) = \int_X \psi(|f-g|)\,d\mu$ определяет метрику на $L^0(X,\mu)$, и что сходимость по этой метрике равносильна сходимости по мере.

22. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Обозначим через $L^0(X, \mu)$ пространство классов эквивалентности (здесь эквивалентность — это равенство μ-п.в.) измеримых функций на X. Докажите, что формула

$$\rho(f, g) = \min\bigl\{1,\ \inf\{a \geqslant 0 : \mu\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant a\} < a\}\bigr\}$$

определяет метрику на $L^0(X, \mu)$, и что сходимость по этой метрике равносильна сходимости по мере.

23. Докажите, что на пространстве $L^0[0, 1]$ нет топологии, сходимость в которой совпадала бы со сходимостью почти всюду.

24. Постройте пример такой измеримой функции $f\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, что интегралы

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx \tag{1}$$

существуют, но не равны друг другу. Какое условие теоремы Фубини при этом нарушается?

25. Постройте пример такой измеримой функции $f\colon [0, 1]\times[0, 1] \to \mathbb{R}$, что один из интегралов (1) существует, а другой — нет. Какое условие теоремы Фубини при этом нарушается?

26. Пусть $X = Y = [0, 1]$, μ — мера Лебега на $\mathscr{B}or([0, 1])$, ν — считающая мера на $2^{[0,1]}$, $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$, $f = \chi_\Delta$. Вычислите интегралы

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y), \qquad \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x), \qquad \int_{X\times Y} f(x, y)\, d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

Какое условие теоремы Тонелли при этом нарушается?

27. Пусть X — множество всех не более чем счетных ординалов, и пусть $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств X, состоящая из таких $A \subset X$, что либо A, либо $X \setminus A$ не более чем счетно. Определим меру μ на $\mathscr{A}$ формулой

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ не более чем счетно;} \\ 1, & \text{если } X \setminus A \text{ не более чем счетно.} \end{cases}$$

Положим $E = \{(x, y) \in X \times X : x < y\}$ и $f = \chi_E$. Вычислите интегралы

$$\int_X \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y), \qquad \int_X \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x).$$

Какое условие теоремы Тонелли при этом нарушается?

28. Пусть μ — комплексная мера (не обязательно σ-аддитивная) на σ-алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$. Докажите эквивалентность следующих двух определений ее вариации:

$$|\mu|(A) = \sup\Bigl\{\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : A_i \in \mathscr{A},\ A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i\Bigr\} = \sup\Bigl\{\sum_{i=1}^\infty |\mu(A_i)| : A_i \in \mathscr{A},\ A = \bigsqcup_{i=1}^\infty A_i\Bigr\}.$$

29. Сформулируйте и докажите теорему Лебега–Радона–Никодима в предположении, что обе рассматриваемые в ней меры положительны и σ-конечны.

30. Приведите пример положительной σ-аддитивной меры на σ-алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$ и конечной положительной σ-аддитивной меры ν на $\mathscr{A}$, таких, что $\nu \ll \mu$, но ν не обладает плотностью относительно μ. (Разумеется, μ не может быть σ-конечной в силу теоремы Радона–Никодима.)

31. Пусть μ — σ-аддитивная комплексная мера на σ-алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$, и пусть $\mu = h \cdot |\mu|$ — ее полярное разложение. Докажите, что

(a) измеримая функция $f \colon X \to \mathbb{C}$ μ-интегрируема тогда и только тогда, когда она $|\mu|$-интегрируема;

(b) если условие (a) выполнено, то $\int_X f\, d\mu = \int_X f |h|\, d|\mu|$.