

МЕРА И ИНТЕГРАЛ

(спецкурс, осенний семестр 2014–2015 уч. года)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Мера и интеграл Лебега — одни из центральных понятий современного анализа. Они также играют ключевую роль в теории вероятностей и в многочисленных приложениях анализа к другим областям математики, в т.ч. к теории представлений, теории динамических систем, геометрии, теории чисел и математической физике. На нашем факультете элементы теории меры и лебеговской теории интегрирования обычно включаются в общий курс анализа. Цель данного спецкурса — дать более полное введение в этот предмет.

Прerequisites. Базовые курсы анализа, линейной алгебры и общей топологии для первокурсников.

Краткая программа

- 1. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ МЕРЫ.** Алгебры и σ -алгебры множеств. Положительные меры и их свойства. Внешние меры. Теорема Каратеодори. Меры Лебега и Лебега–Стилтьеса на прямой.
- 2. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.** Измеримые функции. Интегрирование неотрицательных функций. Теорема о монотонной сходимости и лемма Фату. Интегрирование комплекснозначных функций. Базовые факты о нормированных пространствах. Пространства L^1 и L^2 . Теорема о мажорированной сходимости. Связь с интегралом Римана. Полнота пространств L^1 и L^2 . Теорема Егорова. Произведения мер и теорема Фубини–Тонелли. Мера Лебега в \mathbb{R}^n .
- 3. КОМПЛЕКСНЫЕ МЕРЫ.** Действительные меры. Разложения Хана и Жордана. Комплексные меры. Вариация комплексной меры. Абсолютная непрерывность. Теорема Лебега–Радона–Никодима. Функции ограниченной вариации и комплексные меры на прямой. Абсолютно непрерывные функции и дифференцирование.
- 4*.** **МЕРЫ РАДОНА.** Локально компактные топологические пространства. Меры Радона. Теоремы Рисса о положительных функционалах на $C_c(X)$ и об ограниченных функционалах на $C_0(X)$.
- 5*.** **МЕРЫ ХАУСДОРФА.** p -мерная мера Хаусдорфа. Теорема Витали о покрытиях. Связь n -мерной меры Хаусдорфа с мерой Лебега в \mathbb{R}^n . Хаусдорфова размерность. Самоподобные множества.

*Темы 4 и 5, возможно, будут рассказаны лишь частично либо опущены.