Алгебра — I

Листок 9

Симметрические функции и корни многочленов.

Срок сдачи — 27 апреля.

1. Назовем многочлен $f(x_1,\dots,x_n)\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ *кососимметрическим*, если для любой перестановки $\sigma\in S_n$ мы имеем $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=\operatorname{sgn}(\sigma)f(x_1,\dots,x_n)$. Докажите, что если $\Bbbk$ — поле, причем $\operatorname{char}\Bbbk\neq 2$, то любой кососимметрический многочлен однозначно представляется в виде $f(x_1,\dots,x_n)=g(x_1,\dots,x_n)\Delta$, где $g(x_1,\dots,x_n)$ — симметрический многочлен, а $\Delta=\prod_{i>j}(x_i-x_j)$ — определитель Вандермонда.

2. Докажите, что если следы первых n степеней $n\times n$-матрицы A равны нулю, то матрица A нильпотентна.

3. Стандартный (ортонормированный) базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначим $(e_1,\dots,e_n)$. Пусть A — симметричная положительно определенная вещественная $n\times n$-матрица, рассматриваемая как оператор в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что длины главных осей эллипсоида $(x,Ax)=1$ однозначно определяются набором чисел $\nu_k=\sum_{i=1}^n|A^ke_i|^2$, где k пробегает числа $1,\dots,n$.

4. Выразите через p и q дискриминант многочлена x^n+px+q.

5. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, и пусть $y_1,\dots,y_{n-1}$ — все корни его производной. Докажите, что для дискриминанта $D(f)$ имеет место следующая формула:
$$D(f)=n^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}f(y_i).$$

6. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$. Рассмотрим дискриминант $D(f)$ как многочлен от $a_0,\dots,a_n$. Докажите следующее дифференциальное соотношение:
$$na_0\frac{\partial D}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial D}{\partial a_2}+\dots+a_{n-1}\frac{\partial D}{\partial a_n}=0.$$
(Указание: как меняется дискриминант при сдвиге аргумента $x\mapsto x+h$?)

7. (a) Докажите, что многочлены x^4+1 и x^6+x^3+1 неприводимы над полем рациональных чисел.
   (b) Докажите, что многочлен степени 3 над полем либо неприводим, либо имеет корень. Является ли многочлен x^3-5x^2+1 неприводимым над полем рациональных чисел?
   (c) Докажите, что многочлен от двух переменных x^2+y^2+1 неприводим над полем рациональных чисел. Остается ли он неприводимым над полем комплексных чисел?

8. Пусть p — простое число, k и n — натуральные числа.
   (a) Докажите что многочлен $x^{p^n-1}-1$ делится на многочлен $x^{p^k-1}-1$ в $\mathbb{F}_p[x]$ тогда и только тогда, когда n делится на k.
   (b) Докажите, что поле $\mathbb{F}_{p^k}$ вкладывается в поле $\mathbb{F}_{p^n}$ тогда и только тогда, когда n делится на k.