Алгебра — I

Листок 8–8′

Срок сдачи первых пяти задач — 5 марта.

1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$, и пусть $W \subset V$ — подпространство. Обозначим через $\mathrm{Ann}(W)$ аннулятор W в V^*. Постройте канонические изоморфизмы $(V/W)^* \cong \mathrm{Ann}(W)$ и $W^* \cong V^*/Ann(W)$.

2. (a) Пусть W — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Постройте канонический изоморфизм $(W^*)_{\mathbb{R}} \cong (W_{\mathbb{R}})^*$.

   (b) Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Постройте канонический изоморфизм $(V^*)^{\mathbb{C}} \cong (V^{\mathbb{C}})^*$.

3. Пусть b — билинейная форма на конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Определим *левую корреляцию* b_L и *правую корреляцию* b_R формы b как линейные операторы $V \to V^*$, переводящие произвольный вектор $v \in V$ в линейные функции $b(v, \bullet)$ и $b(\bullet, v)$, соответственно. (Жирная точка $\bullet$ отмечает место, в которое вставляется аргумент линейной функции.) Отождествим пространство V с дважды двойственным V^{**} посредством канонического изоморфизма. Докажите, что сопряженный оператор $b_L^* : V^{**}(= V) \to V^*$ к левой корреляции $b_L : V \to V^*$ совпадает с оператором правой корреляции $b_R : V \to V^*$.

4. Пусть V — n-мерное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $q = p^k$ нечетно, и пусть b — невырожденная симметричная билинейная форма в V.

   (a) Докажите, что если $n > 1$, то существует вектор $v \in V$ такой, что $b(v, v) = 1$.

   (b) **(Закон инерции над конечным полем.)** Выберем элемент $\eta \in \mathbb{F}_q^*$, не являющийся квадратом. Докажите, что заменой базиса матрица формы b может быть приведена либо к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \eta \end{pmatrix}$, но только к одному из них.

5. Пусть b — билинейная форма на n-мерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Подпространство $W \subseteq V$ называется изотропным, если ограничение b на W равно нулю.

   (a) Найдите в $\mathbb{C}^n$ для формы $b(x, y) = \sum x_k y_k$ изотропное подпространство максимальной возможной размерности.

   (b) Может ли максимальная размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы быть больше, чем $n/2$?

   (c) Пусть b — кососимметрическая билинейная форма, а основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства в зависимости от ранга формы b?

   (d) Пусть b — симметрическая билинейная форма, а основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства в зависимости от индексов инерции формы b?

6. * Докажите, что если в симметрической матрице некоторый главный минор порядка r отличен от нуля, а все окаймляющие его главные миноры порядка $r + 1$ и $r + 2$ равны нулю, то ранг этой матрицы равен r.

7. * Сопоставим каждому (неориентированному) графу Γ с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ квадратичную функцию $q_\Gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, положив

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } i = j, \\ -1, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром}, \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром}. \end{cases}$$

   (a) Докажите, что если функция q_Γ положительно определена, то граф Γ не содержит циклов, то есть каждая связная компонента его является деревом.

   (b) Докажите, что если функция q_Γ неотрицательно определена, то каждая связная компонента графа Γ — либо дерево, либо замкнутая цепочка.

   (c) * Опишите все связные графы, для которых функция q_Γ положительно определена; неотрицательно определена.