Алгебра — I

Листок $7'$

1. Всякая ли матрица подобна своей транспонированной

   (a) над полем $\mathbb{C}$?

   (b) над произвольным полем?

2. (a) Пусть F — линейный оператор в произвольном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$, локально нильпотентный в том смысле, что для любого $v \in V$ найдется натуральное число N такое, что $F^N v = 0$. Докажите, что для каждого формального степенного ряда $g(t) = \sum a_k t^k \in \Bbbk[[t]]$ корректно определен линейный оператор $g(F) = \sum a_k F^k$, причем такое сопоставление формальному степенному ряду линейного оператора определяет гомоморфизм алгебры формальных степенных рядов $\Bbbk[[t]]$ в алгебру линейных операторов $\operatorname{End}_{\Bbbk} V$.

   (b) Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$. Докажите, что $V = \Bbbk[x]$, $F = \partial/\partial x$, $g(t) = \exp(t) = \sum \frac{t^k}{k!}$ удовлетворяют условиям предыдущего пункта, причем для любого многочлена $P(x) \in \Bbbk[x]$ имеет место равенство $\exp(\partial/\partial x)P(x) = P(x+1)$.

   (c) Докажите, что для любого многочлена $P(x) \in \Bbbk[x]$ линейное дифференциальное уравнение $f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) = P(x)$ (где $a_1 \ldots, a_n \in \Bbbk$) имеет единственное решение в $\Bbbk[x]$.

3. Пусть F — линейный оператор в конечномерном пространстве V над полем $\Bbbk$. Обозначим через $\operatorname{End}_F(V)$ алгебру линейных операторов в V, перестановочных с F. Докажите, что существует разложение пространства V в прямую сумму ненулевых F-инвариантных подпространств V_1, V_2 тогда и только тогда, когда существуют ненулевые операторы $P_1, P_2 \in \operatorname{End}_F(V)$, удовлетворяющие условиям $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$, $P_1 + P_2 = 1$.

4. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$. Линейный оператор $F : V \to V$ называется *полупростым*, если у каждого его инвариантного подпространства $U \subset V$ есть инвариантное прямое дополнение, то есть существует F-инвариантное подпространство $W \subset V$ такое, что $V = U \oplus W$.

   (a) Докажите, что при $\Bbbk = \mathbb{C}$ (и вообще, для любого алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$) оператор F полупрост тогда и только тогда, когда он диагонализуем.

   (b) Докажите, что для любого алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$ любой оператор F можно представить как сумму $F = F_s + F_n$, где оператор F_s полупрост, оператор F_n нильпотентен, причем $F_s F_n = F_n F_s$. (Такое разложение оператора в сумму называется *разложением Жордана.*

   (c) Докажите, что разложение Жордана любого оператора над алгебраически замкнутым полем единственно.

   (d) Пусть F, G — пара коммутирующих (перестановочных) операторов в векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Докажите, что $(F+G)_s = F_s + G_s$ и $(F+G)_n = F_n + G_n$.

   (e) ** Верно ли, что разложение Жордана существует и единственно над произвольным полем?

5. Найдите максимально возможное число попарно перестановочных линейно независимых полупростых линейных операторов в $\mathbb{C}^n$.