Алгебра — I

Листок 7

Срок сдачи 12 февраля.

1. Множество $c_{00} = \{(\ldots, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \ldots) \mid z_i \in \mathbb{C}, z_k \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $k\}$ всех финитных двусторонних последовательностей комплексных чисел рассмотрим как векторное пространство над $\mathbb{C}$. Приведите пример обратимого линейного оператора в c_{00}, не имеющего ни одного собственного вектора.

2. Какие из следующих утверждений верны?

   (a) Если оператор на конечномерном векторном пространстве обратим, то он диагонализуем.

   (b) Если квадрат оператора на конечномерном векторном пространстве диагонализуем, то сам он тоже диагонализуем.

3. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \Bbbk)$ (где $\mathrm{Mat}(n, \Bbbk)$ — пространство $n \times n$ матриц с коэффициентами из $\Bbbk$) — фиксированная диагональная матрица, причем все ее собственные значения различны. Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $f \colon \mathrm{Mat}(n, \Bbbk) \to \mathrm{Mat}(n, \Bbbk)$ для следующих случаев:

   (a) $f(X) = AX$;

   (b) $f(X) = [A, X] = AX - XA$;

   (c) $f(X) = A^{-1}XA$ (в этом пункте предполагаем невырожденность матрицы A).

4. Решите предыдущую задачу в случае, когда A — произвольная матрица, имеющая n различных собственных значений.

5. Докажите, что следующие свойства линейного оператора F в конечномерном комплексном векторном пространстве V равносильны:

   - Для каждого собственного значения оператора F соответствующее собственное подпространство одномерно.
   - Каждому собственному значению оператора F в его жордановой нормальной форме отвечает ровно одна жорданова клетка.
   - Минимальный многочлен оператора F совпадает с характеристическим.
   - Фробениусова нормальная форма оператора F состоит из единственного циклического блока.
   - Всякий оператор, перестановочный с F, выражается как многочлен от F.

6. Пусть две вещественные матрицы подобны над $\mathbb{C}$. Верно ли, что они подобны и над $\mathbb{R}$?