Алгебра — I

Листок 6

Срок сдачи 24 января.

1. Пусть операторы F и G в конечномерном векторном пространстве коммутируют. Докажите, что $\operatorname{Ker} G$ и $\operatorname{Im} G$ — инвариантные подпространства оператора F.

2. Пусть W — подпространство векторного пространства V; и пусть $v_1, \ldots, v_k \in V$. Рассмотрим смежные классы $\bar{v}_i = v_i + W \in V/W$.

   (a) Верно ли, что если $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы, то и $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ тоже линейно независимы?

   (b) Верно ли, что если $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ линейно независимы, то и $v_1, \ldots, v_k$ тоже линейно независимы?

3. Пусть F — идемпотентный линейный оператор (то есть $F^2 = F$). Какими могут быть характеристический и минимальный многочлены оператора F? Докажите, что у оператора F есть собственный базис. Как выглядит матрица оператора F в собственном базисе?

4. Пусть линейный оператор F имеет собственные векторы $v_1, \ldots, v_k$ с различными собственными значениями.

   (a) Докажите, что эти собственные векторы линейно независимы.

   (b) Докажите, что если k равно размерности пространства, то любое инвариантное подпространство оператора F является линейной оболочкой некоторых из этих собственных векторов.

5. Докажите, что любое (возможно, бесконечное) семейство попарно коммутирующих операторов в конечномерном комплексном векторном пространстве имеет общий собственный вектор.

6. Пусть линейный оператор F в конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению $F^n = \mathrm{id}$.

   (a) Докажите, что все собственные значения этого оператора являются степенями числа $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

   (b) Докажите, что если все собственные значения этого оператора равны, то он скалярен (то есть пропорционален тождественному оператору).