

Алгебра — I

Листок 5' (дополнительный)

Внимание! Срок сдачи 19 декабря.

1. Докажите, что значение функции Эйлера $\varphi(m)$ для $m = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ (p_i — различные простые числа) задается формулой

$$\varphi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

2. (a) Пусть d, n — натуральные числа, причем d делит n . Сколько в циклической группе порядка n элементов порядка d ?

- (b) Докажите, что $\sum_{d|m} \varphi(d) = m$.

3. Приведите примеры делителей нуля в кольце непрерывных функций на $[0, 1]$.

4. Докажите, что кольцо $\mathbb{k}[x, y]$ многочленов от двух переменных не является кольцом главных идеалов.

5. Докажите, что кольцо $\mathbb{k}[[x]]$ формальных степенных рядов над полем \mathbb{k} является кольцом главных идеалов (и даже евклидовым). Какие элементы этого кольца неприводимы (просты)?

6. Пусть $f(x) = x^3 + b \in \mathbb{F}_7[x]$. Для каких $b \in \mathbb{F}_7$ существует ненулевой гомоморфизм колец $\mathbb{F}_7[x]/(f(x)) \rightarrow \mathbb{F}_7$?

7. (a) Сколько неприводимых многочленов степени 2 и 3 над полем \mathbb{F}_q ?

- (b) Пусть n_k — число неприводимых многочленов степени k со старшим коэффициентом 1 над полем \mathbb{F}_q . Докажите, что в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[x]]$ выполнено равенство

$$1 - qx = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{n_k}.$$