

Алгебра — I

Листок 4

Внимание! Срок сдачи 27 ноября.

1. Докажите, что если подгруппа $H \subset G$ имеет индекс 2, то она нормальна (группа G не обязательно конечна; индекс подгруппы — число левых смежных классов по ней).
2. Какие подгруппы имеет группа S_3 ? Найдите для них левые и правые смежные классы. Какие подгруппы группы S_3 являются нормальными?
3. Докажите, что группа S_4 имеет, кроме себя самой и единичной подгруппы, лишь следующие нормальные подгруппы: знакопеременная группа A_4 и “четверная группа Клейна” V_4 , состоящая из перестановок:

$$e, \quad (12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(23).$$

Покажите, что последняя группа абелева.

4. Докажите, что $S_4/V_4 \cong S_3$.
5. Пусть p — простое число. Найдите число подгрупп порядка p в симметрической группе S_n , если
(а) $p \leq n < 2p$; (б) $2p \leq n < 3p$.
6. Докажите, что
 - (а) симметрическая группа S_3 изоморфна группе, заданной образующими s_1, s_2 и соотношениями $s_1^2 = e, s_2^2 = e, (s_1 s_2)^3 = e$;
 - (б) симметрическая группа S_4 изоморфна группе, заданной образующими s_1, s_2, s_3 и соотношениями $s_1^2 = e, s_2^2 = e, s_3^2 = e, (s_1 s_2)^3 = e, (s_1 s_3)^2 = e, (s_2 s_3)^3 = e$.