

Алгебра — I

Листок 3' (дополнительный)

Внимание! Срок сдачи 20 ноября.

- (1) Пусть $\{1, \dots, n\} = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \dots \sqcup I_k$ — разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на орбиты перестановки $\sigma \in S_n$. Определим *декремент* перестановки формулой

$$d(\sigma) = \sum_{l=1}^k (|I_l| - 1) = n - k.$$

- (a) Докажите, что знак перестановки σ равен $(-1)^{d(\sigma)}$.
(b) Докажите, что перестановку σ можно представить в виде произведения $d(\sigma)$ транспозиций.
(c) Докажите, что перестановку σ нельзя представить в виде произведения менее чем $d(\sigma)$ транспозиций.
- (2) Под группой многогранника мы будем понимать группу *вращений* многогранника. Найдите порядок стационарной группы вершины и порядок самой группы для
- (a) группы диэдра;
(b) группы тетраэдра;
(c) группы куба;
(d) группы икосаэдра.
- (3) Докажите, что
- (a) группа диэдра D_3 изоморфна симметрической группе S_3 ;
(b) группа тетраэдра T изоморфна знакопеременной группе A_4 ;
(c) группа куба C изоморфна симметрической группе S_4 ;
(d) группа икосаэдра I изоморфна знакопеременной группе A_5 .
- (4) Сколько существует различных ожерелий из 6 бусин, каждая из которых может быть красного, синего или желтого цвета? (Указание: используйте формулу Бернсайда).
- (5) Докажите, что знакопеременная группа A_n , $n \geq 3$, порождается циклами длины 3, причем на самом деле

$$A_n = \langle (123), (124), \dots, (12n) \rangle.$$