

Алгебра — I

Листок 3

Внимание! Срок сдачи 13 ноября.

1. Представьте цикл $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$ в виде произведения $n - 1$ транспозиции.
2. Пусть $\sigma \in S_n$ — нечетная перестановка и N — ее порядок в группе S_n . Что можно сказать про четность N ?
3. Докажите, что если порядок любого неединичного элемента группы G равен двум, то группа G — абелева. Приведите пример такой группы более чем из двух элементов.
4. Пусть G — произвольная группа, $a, b \in G$, причем порядок элемента $ab \in G$ равен n . Каким может быть порядок элемента ba ?
5. Докажите, что непустое подмножество H конечной группы G является подгруппой, если H замкнуто относительно умножения (т. е. в данном случае требование существования в H обратных элементов излишне). Верно ли это для бесконечной группы G ?
6. Рассмотрим четыре матрицы из $\text{SL}(2, \mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что множество $Q_8 = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ является подгруппой в $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ (Q_8 называется группой кватернионов). Найдите порядки всех элементов в Q_8 . Докажите, что группа диэдра D_4 и группа кватернионов Q_8 не изоморфны.