Алгебра — I

Листок 2

(1) Для каждого из определенных ниже отображений D пространства $\Bbbk[x]_{\leqslant m}$ (многочленов от x степени $\leqslant m$) в себя докажите, что D является линейным оператором, напишите его матрицу в стандартном базисе $(1, x, \dots, x^m)$, и найдите базис, в котором матрица оператора D имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

  (a) D переводит каждый многочлен $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ в его производную $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

  (b) D переводит каждый многочлен $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ в его первую разность $f(x+1) - f(x)$.

(2) Докажите, что ранг $m \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ равен 1 тогда и только тогда, когда существуют числа $x_1, \dots, x_m$ (не все из которых равны нулю) и числа $y_1, \dots, y_n$ (не все из которых равны нулю) такие, что $a_{ij} = x_i y_j$ для любых i, j.

(3) Как изменится определитель матрицы, если ее симметрично отразить относительно побочной диагонали?

(4) Докажите, что если сумма всех элементов матрицы в каждой строке равна нулю, то определитель матрицы равен нулю.

(5) (a) Пусть квадратная матрица X представляется в блочном виде с нулевым угловым блоком: $X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$. Докажите, что если матрицы A и C — квадратные, то $\det X = \det A \det C$.

  (b) Пусть A и B — матрицы $n \times n$ над произвольным полем $\Bbbk$. Покажите, что матрицу $C = \left(\begin{smallmatrix} E & B \\ -A & 0 \end{smallmatrix}\right)$ можно привести элементарными преобразованиями к матрице $D = \left(\begin{smallmatrix} E & B \\ 0 & AB \end{smallmatrix}\right)$, и получите тем самым другое доказательство того, что $\det AB = \det A \det B$.

(6) Сколько над полем из q элементов

  (a) невырожденных матриц размера $n \times n$?

  (b) матриц размера $n \times n$ с фиксированным определителем $d \neq 0$?

  (c) матриц размера $m \times n$ ранга m, где $m < n$?

(7) Квадратная матрица называется *кососимметрической*, если $a_{ij} = -a_{ji}$ для любых i, j.

  (a) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

  (b) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы четвертого порядка является полным квадратом (как многочлен от матричных элементов).

  (c) * Докажите, что определитель кососимметрической матрицы любого четного порядка является полным квадратом.

(8) Пусть дана квадратная $n \times n$ матрица $A = (a_{ij})$. Обозначим через $\hat{A}$ матрицу из алгебраических дополнений к элементам матрицы A (она называется *присоединенной* матрицей).

  (a) Докажите, что при применении к матрице A элементарного преобразования (прибавления к i-й строке j-й, умноженной на λ) матрица $\hat{A}$ также подвергается элементарному преобразованию. Какому?

  (b) Докажите, что если $\det A = 0$, то и $\det \hat{A} = 0$.

  (c) * Докажите, что $\det \hat{A} = \det A^{n-1}$.

(9) *Решеткой подпространств* в векторном пространстве V называется любое множество его подпространств, замкнутое относительно операций пересечения и суммы. Решетка подпространств L называется *дистрибутивной*, если для любых $V_1, V_2, V_3 \in L$ выполнено равенство $V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3$.

  (a) Пусть в пространстве V выбран базис $(v_1, \dots, v_n)$. Докажите, что всевозможные линейные оболочки подмножеств базиса образуют дистрибутивную решетку подпространств в V.

  (b) При каких n решетка всех подпространств в $\mathbb{R}^n$ является дистрибутивной?

  (c) * Докажите, что для любой дистрибутивной решетки подпространств в конечномерном пространстве V существует такой базис $(v_1, \dots, v_n)$, что каждое подпространство из решетки является линейной оболочкой некоторого множества базисных векторов v_i.