Алгебра — I

Листок 10

Тензорные произведения.

Срок сдачи задач без звездочек — 25 мая.

1. Докажите, что в тензорном произведении векторных пространств над полем $\Bbbk$ тензорное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда один из векторов–сомножителей равен нулю.

2. Пусть (e_i) — базис n-мерного пространства V, а (e^i) — двойственный базис пространства V^*. Докажите, что тензор $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i \in V \otimes V^*$ не зависит от выбора базиса (e_i).

3. Обозначим через ϕ изоморфизм $\mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,V)^*$, получающийся композицией канонических изоморфизмов $\mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V^* \xrightarrow{\sim} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{\sim} (V^* \otimes V)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,V)^*$. Сопоставим ему билинейную форму Φ на пространстве $\mathrm{Hom}(V,V)$, заданную формулой $\Phi(F_1,F_2) = (\phi(F_1))(F_2)$. Является ли эта форма симметрической? Как она вычисляется в терминах матриц операторов F_1, F_2?

4. Докажите, что любое $GL(V)$-эквивариантное (то есть перестановочное с действием $GL(V)$) линейное отображение $V^* \otimes V \to \Bbbk$ пропорционально отображению свертки. (Элемент $g \in GL(V)$ действует в $\Bbbk$ тождественным оператором, а в $V^* \otimes V$ — линейным оператором $(g^{-1})^* \otimes g$.)

5. Докажите, что тензор $t \in V^* \otimes W$ представляется в виде суммы k разложимых тензоров тогда и только тогда, когда ранг соответствующего линейного оператора из $\mathrm{Hom}(V,W)$ не превосходит k.

6. Пусть V, W — векторные пространства над полем комплексных чисел, $\dim V = n$, $\dim W = k$.
   (a) Сколько орбит у действия $GL(V) \times GL(W)$ на $V \otimes W$?
   (b) Сколько орбит у действия $GL(V)$ на $V^* \otimes V$? (Элемент $g \in GL(V)$ действует в $V^* \otimes V$ линейным оператором $(g^{-1})^* \otimes g$.)
   (c) Сколько орбит у действия $GL(V)$ на S^2V^*? (Элемент $g \in GL(V)$ действует в S^2V^* линейным оператором $S^2(g^{-1})^*$.)

7. * Вычислите $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

8. * **(Инвариант Дена)** Пусть P — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через l_i длины ребер многогранника P, а через α_i — величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника P называется $\mathrm{Dehn}(P) = \sum l_i \otimes \alpha_i \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$.
   (a) Докажите, что если многогранник P разбит плоскостью на два многогранника P_1 и P_2, то $\mathrm{Dehn}(P) = \mathrm{Dehn}(P_1) + \mathrm{Dehn}(P_2)$.
   (b) Докажите, что если два многогранника P_1 и P_2 равносоставлены (то есть P_1 может быть разбит на меньшие многогранники, из которых можно составить P_2), то $\mathrm{Dehn}(P_1) = \mathrm{Dehn}(P_2)$.
   (c) Докажите, что $\cos n\varphi$ выражается как многочлен от $\cos\varphi$ (этот многочлен называется n-м многочленом Чебышева). Чему равен его старший коэффициент? Докажите, что $\arccos\frac{1}{3}$ не является рациональным кратным π.
   (d) Докажите, что куб и правильный тетраэдр одного объема не являются равносоставленными.