Алгебра — I

Листок 1

(1) Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ - множество всех векторов, сумма координат которых равна 0.
  (a) Докажите, что V является векторным подпространством в $\mathbb{R}^n$
  (b) Найдите размерность V, укажите какой-нибудь базис.

(2) Докажите, что система линейных уравнений $AX = B$ с трехдиагональной квадратной матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}$$

имеет единственное решение в вещественных числах при любой правой части B.

(3) Сколько всего в n-мерном векторном пространстве над полем из q элементов
  (a) векторов?
  (b) упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов?
  (c) k-мерных подпространств?

(4) (a) Докажите, что в любом конечном поле есть подполе из p элементов, где p — некоторое простое число.
  (b) Докажите, что число элементов любого конечного поля является степенью простого числа.

(5) Пусть векторное пространство $V \subset \Bbbk[x]$ содержит по многочлену каждой из степеней $d = 0, 1, \dots, m$. Верно ли, что оно содержит все многочлены степени $\leqslant m$?

(6) Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ — два поля, и $\mathbb{F}$ конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Обязательно ли любой элемент поля $\mathbb{F}$ является корнем некоторого ненулевого многочлена из $\Bbbk[x]$?

(7) Дано несколько разных точек $p_0, p_1, \dots, p_m \in \Bbbk$. Постройте в пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant m}$ многочленов от x степени $\leqslant m$ базис, координатами многочлена f в котором являются значения $f(p_i)$.

(8) Производной многочлена $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ над полем $\Bbbk$ называется многочлен $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Постройте в пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant m}$ многочленов от x степени $\leqslant m$ базис, координатами многочлена f в котором являются значения производных $f^{(k)}(p)$ для некоторой фиксированной точки $p \in \Bbbk$ и $k = 0, 1, \dots, m$.

(9) Пусть V — множество всех подмножеств некоторого множества M. Для $X, Y \in V$ определим их сумму как симметрическую разность $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. Кроме того, для $X \in V$ положим $0 \cdot X = \varnothing$ и $1 \cdot X = X$, где $0, 1$ — соответственно, ноль и единица поля $\mathbb{F}_2$ из двух элементов.
  (a) Докажите, что таким образом на V определена структура векторного пространства над полем $\mathbb{F}_2$.
  (b) Какова размерность этого пространства (для конечного множества M)? Укажите какой-нибудь базис V.
  (c) Обязательно ли семейство подмножеств $X_1, \dots, X_n$ линейно независимо, если $X_i \not\subset \bigcup\limits_{j \neq i} X_j$ для любого i?
  (d) Обязательно ли семейство подмножеств $X_1, \dots, X_n$ линейно независимо, если $X_1 \not\subset X_2 \not\subset \dots \not\subset X_n$?

(10) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров в каждой так, что суммарный вес коров первой части равен суммарному весу коров другой части. Рассмотрите эти равенства как систему линейных уравнений на веса коров и докажите, что все коровы весят одинаково,
  (a) если вес каждой коровы — натуральное число;
  (a') если вес каждой коровы — элемент поля $\mathbb{F}_2$;
  (b) если вес каждой коровы — целое число;
  (c) если вес каждой коровы — рациональное число;
  (d) если вес каждой коровы — вещественное число;
  (e) если вес каждой коровы — комплексное число.