

Алгебра — I

Листок 0

Под “кольцом” в этом листке понимается коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

- (1) (a) Докажите, что для любых двух элементов a, b кольца A уравнение $x + b = a$ имеет единственное решение. (Это решение обозначается $a - b$.)
(b) Докажите, что для любых элементов a и $b \neq 0$ поля \mathbb{K} уравнение $bx = a$ имеет единственное решение. (Это решение обозначается a/b .)
(c) Докажите, что для любого элемента a кольца A выполнено равенство $0 \cdot a = 0$.
(d) Докажите, что для любого элемента a кольца A выполнено равенство $(-1) \cdot a = -a$.
- (2) (a) Постройте поле из 3 элементов.
(b) Постройте поле из 5 элементов.
(c) Постройте поле из 4 элементов.
(d) Существует ли поле из 6 элементов?
- (3) Раскройте скобки у $(a_1 + \dots + a_m)^2$ и $(a + b + c)^3$.
- (4) Чему равен коэффициент при $a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(a_1 + \dots + a_m)^n$?
- (5) Вычислите:

- (a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$;
- (b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$;
- (c) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$;
- (d) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$;
- (e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$.

- (6) Выразите $\sin^4 x$ и $\cos^5 x$ через первые степени \sin и \cos от кратных аргументов.
- (7) Выразите $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.
- (8) Вычислите:
 - (a) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;
 - (b) $\sin^2 x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2(2n - 1)x$;
 - (c) $\cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx$.
- (9) Найдите модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

$$-4, \quad 1 + i, \quad 1 - i\sqrt{3}, \quad \sin \alpha + i \cos \alpha, \quad \frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}, \quad 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

- (10) Вычислите

$$\frac{(5 + i)(7 - 6i)}{3 + i}; \quad \frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}; \quad \frac{(1 + 3i)(8 - i)}{(2 + i)^2}.$$

- (11) Найдите x и y , считая их вещественными:

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i.$$

- (12) Решите уравнения:

$$z^2 = i; \quad z^2 = 5 - 12i; \quad z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0.$$

- (13) Найдите все z :

$$\bar{z} = z^2; \quad \bar{z} = z^3.$$

- (14) Вычислите

$$(1 + i\sqrt{3})^{150}; \quad \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)^{30}; \quad (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^k.$$