Контрольная 2. 20 октября.

Вариант I.

Задача 1. Пусть F — линейное отображение из $V = \mathbb{R}^5$ в $W = \mathbb{R}^3$, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 3&2&0&1&0 \\ 2&3&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1 \end{smallmatrix}\right)$. Выпишите матрицу этого же линейного преобразования в других координатах, заданных новыми базисами S и S', где $S := \{(1,1,0,1,0),(0,1,1,0,1),(1,0,1,1,0),(0,1,0,1,1),(1,0,1,0,1)\}$, $S' := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$.

Задача 2. Вычислите определитель отображения $G \in \mathrm{End}(\mathbb{R}[x]_{\leqslant 8})$, заданного следующим образом: $G(f(x)) = 3f(1) + 5(x-2)f'(x-3) + 2f''(2-x) - x^2 f'''(3x-1)$.

Задача 3. С 3×2 матрицей проделали следующую операцию: сначала к первому столбцу прибавили второй, умноженный на 3, после этого вторую строку умножили на 2 и прибавили к ней первую, умноженную на 5.

(a) докажите, что подобная операция задает линейное отображение из векторного пространства 3×2 матриц в себя;

(b) вычислите ранг этого отображения;

(c) выпишите матрицу этого линейного отображения в каком-нибудь удобном базисе.

Задача 4. Пусть $a_0, \dots, a_n$ — набор положительных вещественных чисел. Обозначим за b их сумму. Для всех $k = 0, 1, \dots, n$ определим многочлен $P_k(t) = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} (-1)^i t^{k-i}$. Верно ли, что вектор
$v = (P_0(b), P_1(b), P_2(b), \dots, P_n(b))$ выражается как линейная комбинация векторов
$v_0 = (P_0(a_0), P_1(a_0), P_2(a_0), \dots, P_n(a_0))$, ..., $v_n = (P_0(a_n), P_1(a_n), P_2(a_n), \dots, P_n(a_n))$

(a) если все a_i различны?

(b) если не все a_i различны?

Если верно, то предъявите какой-нибудь набор коэффициентов разложения.

Контрольная 2. 20 октября.

Вариант II.

Задача 1. Пусть F — линейное отображение из $V = \mathbb{R}^5$ в $W = \mathbb{R}^3$, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 3&2&0&1&0 \\ 2&3&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1 \end{smallmatrix}\right)$. Выпишите матрицу этого же линейного преобразования в других координатах, заданных новыми базисами S и S', где $S := \{(1,0,1,0,1),(1,1,0,1,0),(0,1,1,0,1),(1,0,1,1,0),(0,1,0,1,1)\}$, $S' := \{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\}$.

Задача 2. Вычислите определитель отображения $G \in \mathrm{End}(\mathbb{R}[x]_{\leqslant 8})$, заданного следующим образом: $G(f(x)) = 2f(x) + 2(x-1)f'(2-x) - 4f''(x-3) + 5x^2 f'''(2x-3)$.

Задача 3. С 2×3 матрицей проделали следующую операцию: сначала к первому столбцу прибавили второй, умноженный на 3, после этого вторую строку умножили на 2 и прибавили к ней первую, умноженную на 5.

(a) докажите, что подобная операция задает линейное отображение из векторного пространства 2×3 матриц в себя;

(b) вычислите ранг этого отображения;

(c) выпишите матрицу этого линейного отображения в каком-нибудь удобном базисе.

Задача 4. Пусть $a_0, \dots, a_n$ — набор положительных вещественных чисел. Обозначим за b их сумму. Для всех $k = 0, 1, \dots, n$ определим многочлен $P_k(t) = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} 2^i t^{k-i}$. Верно ли, что вектор
$v = (P_0(b), P_1(b), P_2(b), \dots, P_n(b))$ выражается как линейная комбинация векторов
$v_0 = (P_0(a_0), P_1(a_0), P_2(a_0), \dots, P_n(a_0))$,...,$v_n = (P_0(a_n), P_1(a_n), P_2(a_n), \dots, P_n(a_n))$

(a) если все a_i различны?

(b) если не все a_i различны?

Если верно, то предъявите какой-нибудь набор коэффициентов разложения.