

Экзамен по алгебре

Вариант I

- (1) Докажите, что гомоморфизм группы порядка $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ в группу перестановок S_7 всегда имеет нетривиальное ядро.
- (2) Найдите все целочисленные решения уравнения $533x + 442y = 26$.
- (3) Найдите порядок элемента $x + 2y$ в абелевой группе, заданной двумя образующими x, y и двумя соотношениями $2x + 2y = 0 = 6x + 10y$.
- (4) Докажите, что
 - (a) множество 3×3 верхнетреугольных матриц над \mathbb{F}_7 с единицами на главной диагонали образуют группу;
 - (b) эта группа изоморфна группе, заданной 3 образующими a, b, c и соотношениями
$$a^7 = b^7 = c^7 = e, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = cba.$$
- (5)
 - (a) Каков минимальный порядок абелевой группы, которая имеет подгруппы порядков 6, 4 и 10?
 - (b) Опишите все такие группы и предъявите в них подгруппы соответствующих порядков.
- (6) Найдите такой многочлен $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, что $f(2) = 1$, остаток f при делении на $x^2 + x - 1$ равен 3, а остаток f при делении на $x^3 + x$ равен 2, или объясните, что таких многочленов не существует.

Экзамен по алгебре

Вариант II

- (1) Докажите, что гомоморфизм группы порядка $115 = 5 \cdot 23$ в группу перестановок S_5 всегда имеет нетривиальное ядро.
- (2) Найдите все целочисленные решения уравнения $552x + 513y = 15$.
- (3) Найдите порядок элемента $2x + y$ в абелевой группе, заданной двумя образующими x, y и двумя соотношениями $3x + 6y = 0 = 6x + 9y$.
- (4) Докажите, что
 - (a) множество 3×3 верхнетреугольных матриц над \mathbb{F}_5 с единицами на главной диагонали образуют группу;
 - (b) эта группа изоморфна группе, заданной 3 образующими a, b, c и соотношениями
$$a^5 = b^5 = c^5 = e, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = cba.$$
- (5)
 - (a) Каков минимальный порядок абелевой группы, которая имеет подгруппы порядков 6, 9 и 15?
 - (b) Опишите все такие группы и предъявите в них подгруппы соответствующих порядков.
- (6) Найдите такой многочлен $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, что $f(1) = 1$, остаток f при делении на $x^2 + 1$ равен $x + 1$, а остаток f при делении на $x^3 + x^2 - x$ равен 1, или объясните, что таких многочленов не существует.