Экзамен по алгебре
19 июня 2015.

Вариант I.

Задача 1. Исключите x из системы уравнений:
$$\begin{cases} x^2+3xy+3y^2-3 &= 0; \\ x^2y+xy^2+6 &= 0. \end{cases}$$

Задача 2. Рассмотрим многочлен $f(x)=x^3-2x+2$. Есть ли у него кратные корни в $\mathbb{C}$? Для каких простых p у этого многочлена есть кратные корни в алгебраически замкнутом поле характеристики p?

Задача 3. Пусть A – линейный оператор в $\mathbb{Q}^n$, характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ которого равен $\lambda^n-5\lambda^2+a\lambda$.

(a) Для $k=1,\ldots,n$ найдите $\operatorname{tr}(A^k)$; $\operatorname{tr}(\Lambda^k A)$; $\operatorname{tr}(S^k A)$.

(b) При $n=5$ и $a=0$ найдите степень минимального расширения $\mathbb{F}\supset\mathbb{Q}$, над которым данный оператор A диагонализуем (при условии, что он диагонализуем над каким-нибудь расширением).

Задача 4. Пусть $A,B:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ — нильпотентные операторы ранга 2. Найдите максимальный размер жордановой клетки в жордановой нормальной форме оператора $A\otimes B$.

Задача 5. Пусть (e_1,e_2,e_3) — базис пространства V, а (f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) — базис пространства W. Найдите минимальное число разложимых тензоров, в виде линейной комбинации которых можно выразить $t\in V\otimes W$, где $t=e_1\otimes f_1+e_2\otimes f_2+e_3\otimes f_3+2e_1\otimes f_2+2e_2\otimes f_1+e_1\otimes f_2+4e_1\otimes f_5+3e_2\otimes f_3+$ $+5e_3\otimes f_2+2e_1\otimes f_3+e_2\otimes f_4-e_3\otimes f_4+5e_2\otimes f_5+3e_3\otimes f_5$.

Задача 6. Пусть V — двумерное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом (e_1,e_2), и пусть (e^1,e^2) — двойственный базис пространства V^*. В пространстве $W=\Lambda V$ рассмотрим оператор A, действующий внешним умножением на e_1+3e_2, и оператор B, действующий внутренним умножением на e^2. Вычислите оператор $AB+BA$.

Экзамен по алгебре
19 июня 2015.

Вариант II.

Задача 1. Исключите x из системы уравнений:
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2-3 &= 0; \\ x^2y+3xy^2+2y^3-6 &= 0. \end{cases}$$

Задача 2. Рассмотрим многочлен $f(x)=x^3+2x-2$. Есть ли у него кратные корни в $\mathbb{C}$? Для каких простых p у этого многочлена есть кратные корни в алгебраически замкнутом поле характеристики p?

Задача 3. Пусть A – линейный оператор в $\mathbb{Q}^n$, характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ которого равен $\lambda^n-a\lambda+3$.

(a) Для $k=1,\ldots,n$ найдите $\operatorname{tr}(A^k)$; $\operatorname{tr}(\Lambda^k A)$; $\operatorname{tr}(S^k A)$.

(b) При $n=3$ и $a=0$ найдите степень минимального расширения $\mathbb{F}\supset\mathbb{Q}$, над которым данный оператор A диагонализуем.

Задача 4. Пусть $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ — нильпотентный оператор ранга 1, а $B:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ — нильпотентный оператор ранга 3. Найдите максимальный размер жордановой клетки в жордановой нормальной форме оператора $A\otimes B$.

Задача 5. Пусть (e_1,e_2,e_3) — базис пространства V, а (f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) — базис пространства W. Найдите минимальное число разложимых тензоров, в виде линейной комбинации которых можно выразить $t\in V\otimes W$, где $t=e_1\otimes f_1+e_2\otimes f_2+e_3\otimes f_3+2e_1\otimes f_2+2e_2\otimes f_1+e_2\otimes f_1+2e_1\otimes f_5-e_2\otimes f_3+$ $+5e_3\otimes f_2+e_1\otimes f_3+e_2\otimes f_5-2e_3\otimes f_5+e_3\otimes f_1+3e_3\otimes f_5$.

Задача 6. Пусть V — двумерное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом (e_1,e_2), и пусть (e^1,e^2) — двойственный базис пространства V^*. В пространстве $W=\Lambda V$ рассмотрим оператор A, действующий внешним умножением на e_2, и оператор B, действующий внутренним умножением на e^1-e^2. Вычислите оператор $AB+BA$.