Вариант I

Задача 1. Какой может быть жорданова нормальная форма линейного оператора в $\mathbb{C}^5$, минимальный многочлен которого равен $(x-2)^2(x-1)$? Опишите все возможные варианты.

Задача 2. Для каждого вектора $v \in \mathbb{C}^6$ обозначим за W_v минимальное подпространство в $\mathbb{C}^6$ содержащее v и инвариантное относительно оператора $A = \begin{pmatrix} 5&1&1&0&0&0\\ 0&5&1&1&0&0\\ 0&0&5&1&0&0\\ 0&0&0&5&0&0\\ 0&0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&1&5 \end{pmatrix}$. Предъявите вектор v, такой что $\dim W_v$ максимально.

Задача 3. Найдите все корни 3-ей степени из матрицы $A = \begin{pmatrix} -26 & 9\\ -54 & 19 \end{pmatrix}$. (То есть найдите все вещественные матрицы B, для которых $B^3 = A$, или объясните, что таковых не существует.)

Задача 4. Вычислите сигнатуру квадратичной формы на пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ многочленов степени не выше 3, сопоставляющей многочлену $f(x)$ произведение его значений в точках 1 и 2.

Задача 5. На пространстве $V = \mathbb{R}^4$ задана билинейная форма $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_4y_4 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 4x_3y_4 + 4x_4y_3$. Для каждого подпространства $W \subset V$ обозначим его ортогонал (множество всех ортогональных векторов) относительно этой формы через $W^\perp$. Чему равно минимальное значение $\dim(W + W^\perp)$?

Задача 6. Линейный оператор A в $\mathbb{R}^3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 1&0&2\\ 0&1&2\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$. Вычислите оператор, сопряженный к A относительно билинейной формы, ассоциированной с квадратичной формой $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_1$.

Задача 7. Путем рациональной замены базиса матрица оператора $\begin{pmatrix} 2&-2&-2&2\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$ была приведена к блочно-диагональной матрице B. Каковы могут быть размеры блоков матрицы B?

Вариант II

Задача 1. Какой может быть жорданова нормальная форма линейного оператора в $\mathbb{C}^6$, минимальный многочлен которого равен $(x+2)^2(x-1)^2$? Опишите все возможные варианты.

Задача 2. Для каждого вектора $v \in \mathbb{C}^6$ обозначим за W_v минимальное подпространство в $\mathbb{C}^6$ содержащее v и инвариантное относительно оператора $A = \begin{pmatrix} 3&0&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&0\\ 1&0&1&3&0&0\\ 0&0&0&0&3&-1\\ 0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$. Предъявите вектор v, такой что $\dim W_v$ максимально.

Задача 3. Найдите все корни 3-ей степени из матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 7\\ -14 & -15 \end{pmatrix}$. (То есть найдите все вещественные матрицы B, для которых $B^3 = A$, или объясните, что таковых не существует.)

Задача 4. Вычислите сигнатуру квадратичной формы на пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ многочленов степени не выше 3, сопоставляющей многочлену $f(x)$ произведение его значений в точках -1 и 3.

Задача 5. На пространстве $V = \mathbb{R}^4$ задана билинейная форма $b(x,y) = x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 2x_3y_4 + 2x_4y_3$. Для каждого подпространства $W \subset V$ обозначим его ортогонал (множество всех ортогональных векторов) относительно этой формы через $W^\perp$. Чему равно максимальное значение $\dim(W \cap W^\perp)$?

Задача 6. Линейный оператор A в $\mathbb{R}^3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 1&2&0\\ 0&1&2\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$. Вычислите оператор, сопряженный к A относительно билинейной формы, ассоциированной с квадратичной формой $q(x) = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задача 7. Путем рациональной замены базиса матрица оператора $\begin{pmatrix} 3&1&0&0\\ -6&0&1&0\\ 3&0&0&1\\ -3&0&0&0 \end{pmatrix}$ была приведена к блочно-диагональной матрице B. Каковы могут быть размеры блоков матрицы B?