Экзамен по алгебре. 1 курс.
29 октября.

Вариант I.

Задача 1. Воспользовавшись формулой Муавра, упростите выражение:

$$\cos(\varphi) - \cos(3\varphi) + \cos(5\varphi) - \cos(7\varphi) + \ldots + (-1)^{n-1}\cos((2n-1)\varphi)$$

Задача 2. Известно, что 4 непрерывные функции $f(x), g(x), h(x), k(x)$ линейно зависимы, причем известны значения этих функций в точках $-1, 0, 1, 2$:
$f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = -5, f(2) = 4;$
$g(-1) = 4, g(0) = 3, g(1) = -2, g(2) = 1;$
$h(-1) = 2, h(0) = 4, h(1) = -3, h(2) = 1;$
$k(-1) = 1, k(0) = 2, k(1) = -6, k(2) = 4.$
Докажите, что нетривиальная линейная зависимость между этими функциями единственна с точностью до пропорциональности, и найдите эту зависимость.

Задача 3. Опишите множество таких 2×3 матриц $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{smallmatrix}\right)$, что
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Вычислите количество 5×7 матриц ранга 1 над конечным полем из q элементов.

Задача 5. Пусть $V = \mathbb{Q}[x]_{\leqslant 4}$ — векторное пространство многочленов с рациональными коэффициентами степени не выше 4. Пусть $A : V \to V$ — линейное отображение, сопоставляющее многочлену $f(x)$ многочлен $f(x-1) - f(x+3)$, соответственно $B : V \to V$ — линейное отображение, определенное по правилу $Bf(x) = f(2x-1) - 2f(2x+1) + f(2x+3)$.

(a) Запишите матрицы линейных операторов A, B в каком-нибудь удобном для вас базисе.

(b) Вычислите размерность пересечения образов отображений $Im(A) \cap Im(B)$.

Задача 6.

(a) Вычислите определитель $(n+1) \times (n+1)$ матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & \lambda & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \lambda & \ldots & n-1 & n \\ & \ldots & \ldots & & & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & \lambda & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \lambda \end{pmatrix}$.

(b) При каких λ данная матрица может быть элементарными преобразованиями строк приведена к матрице $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ & \ldots & \ldots & & \\ 1 & 1 & \ldots & & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 7. Пусть V_1, V_2 — два подпространства в конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Выразите $(V_1 + V_2)^0 \subset V^*$ (аннулятор подпространства $V_1 + V_2 \subset V$) через V_1^0 и V_2^0 (аннуляторы подпространств V_1 и V_2). Ответ обоснуйте.

Экзамен по алгебре. 1 курс.

29 октября.

Вариант II.

Задача 1. Воспользовавшись формулой Муавра, упростите выражение:

$$\sin(\varphi) - \sin(3\varphi) + \sin(5\varphi) - \sin(7\varphi) + \ldots + (-1)^{n-1}\sin((2n-1)\varphi)$$

Задача 2. Известно, что 4 непрерывные функции $f(x), g(x), h(x), k(x)$ линейно зависимы, причем известны значения этих функций в точках $-1, 0, 1, 2$:
$f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = -3, f(2) = 2;$
$g(-1) = 4, g(0) = 3, g(1) = -2, g(2) = 5;$
$h(-1) = 2, h(0) = -1, h(1) = -4, h(2) = -1;$
$k(-1) = 1, k(0) = 2, k(1) = -3, k(2) = 4.$
Докажите, что нетривиальная линейная зависимость между этими функциями единственна с точностью до пропорциональности, и найдите эту зависимость.

Задача 3. Опишите множество таких 2×3 матриц $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{smallmatrix}\right)$, что $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Вычислите количество троек линейно зависимых векторов в векторном пространстве размерности 9 над конечным полем из q элементов при условии, что каждая пара из этой тройки должна быть линейно независимой.

Задача 5. Пусть $V = \mathbb{Q}[x]_{\leqslant 4}$ — векторное пространство многочленов с рациональными коэффициентами степени не выше 4. Пусть $A : V \to V$ — линейное отображение, сопоставляющее многочлену $f(x)$ многочлен $f(x+1) - f(x-2)$, соответственно $B : V \to V$ — линейное отображение, определенное по правилу $Bf(x) = f(x+3) - 2f(x+2) + f(x+1)$.

(a) Запишите матрицы этих линейных операторов в каком-нибудь удобном для вас базисе в V.

(b) Вычислите размерность суммы образов отображений $Im(A) + Im(B)$.

Задача 6.

(a) Вычислите определитель $(n+1) \times (n+1)$ матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \ldots & \lambda^n \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} \\ 2 & 2 & 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-2} \\ & \ldots & \ldots & & & \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \ldots & \lambda \\ n & n & n & n & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

(b) При каких λ данная матрица может быть элементарными преобразованиями строк приведена к матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \ldots & n & 0 \\ \ldots & \ldots & & & \\ n & 0 & \ldots & & 0 \end{pmatrix}$?

Задача 7. Пусть V_1, V_2 — два подпространства в конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Выразите $(V_1 \cap V_2)^0 \subset V^*$ (аннулятор подпространства $V_1 \cap V_2 \subset V$) через V_1^0 и V_2^0 (аннуляторы подпространств V_1 и V_2). Ответ обоснуйте.