

## Программа коллоквиума – 4

### Определения:

Симметрические многочлены, элементарные симметрические многочлены, полные симметрические многочлены, степенные суммы, результат двух многочленов, дискриминант многочлена, расширение полей, алгебраические и трансцендентные элементы расширения, степень расширения, поле разложения многочлена, тензорное произведение векторных пространств, тензорная алгебра векторного пространства, симметрические и кососимметрические тензоры, симметрическая алгебра векторного пространства, внешняя алгебра векторного пространства, Грассманова алгебра с  $n$  образующими, тензоры типа  $(p, q)$ , свертка, внутреннее произведение на ковектор (в тензорной алгебре, в симметрической алгебре, во внешней алгебре), комплекс абелевых групп (векторных пространств), точная последовательность, гомологии комплекса, цепное отображение (морфизм комплексов), цепная гомотопия.

### Теоретические вопросы:

1. Докажите, что любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.
2. Выведите формулы Ньютона, связывающие степенные суммы с элементарными симметрическими функциями.
3. Напишите и докажите формулы, выражающие результат двух многочленов через коэффициенты этих многочленов, через их корни, а также через значения одного из многочленов в корнях другого.
4. Докажите формулу, выражающую дискриминант многочлена через результат этого многочлена и его производной.
5. Докажите, что для любого многочлена над полем  $\mathbb{k}$  существует его поле разложения. Докажите, что поле разложения многочлена определено однозначно с точностью до изоморфизма.
6. Докажите, что для любого числа  $q$ , являющегося степенью простого числа, существует поле из  $q$  элементов, причем все поля из  $q$  элементов изоморфны.
7. Исходя из определения тензорного произведения как универсального билинейного отображения, докажите существование тензорного произведения и его единственность с точностью до изоморфизма.
8. Докажите существование канонических изоморфизмов  $V \otimes W \cong W \otimes V$ ,  $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$ ,  $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ ,  $\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ ,  $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$ .
9. Сформулируйте и докажите свойство универсальности  $k$ -й симметрической степени векторного пространства. Докажите, что симметрическая алгебра  $n$ -мерного пространства изоморфна алгебре многочленов от  $n$  переменных.
10. Сформулируйте и докажите свойство универсальности  $k$ -й внешней степени векторного пространства. Докажите, что внешняя алгебра  $n$ -мерного пространства изоморфна алгебре Грассмана с  $n$  образующими.
11. Докажите, что морфизм комплексов индуцирует морфизм гомологий, причем гомотопные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые морфизмы гомологий. Докажите, что у гомотопически эквивалентных комплексов гомологии изоморфны.