

## Программа коллоквиума – 3

### Определения:

Модуль над коммутативным кольцом; гомоморфизм модулей; подмодуль и фактормодуль; свободный модуль конечного ранга; циклический модуль; фробениусова нормальная форма матрицы линейного оператора; жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора на алгебраически замкнутом поле; характеристический многочлен линейного оператора; минимальный многочлен линейного оператора; собственные значения, собственные векторы и собственные подпространства; корневые подпространства; комплексификация и овеществление; билинейные и квадратичные формы; поляризация квадратичной формы; полуторалинейные формы; евклидовы и эрмитовы скалярные произведения; сопряженный оператор; симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы в евклидовом пространстве; эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы в эрмитовом пространстве; нормальные операторы; полярное разложение.

### Формулировки:

Теорема о гомоморфизмах модулей; теорема о классификации конечно порожденных модулей над евклидовым кольцом; теорема Гамильтона–Кэли; закон инерции; критерий Сильвестра; теорема Якоби; теорема Декарта; лемма Гаусса.

### Теоретические вопросы:

1. Докажите теорему Гамильтона–Кэли.
2. Докажите, что пространство, в котором задан оператор, раскладывается в прямую сумму его корневых подпространств.
3. Докажите, что у любого нильпотентного оператора есть жорданов базис.
4. Докажите, что в жордановой нормальной форме оператора набор размеров жордановых клеток для каждого собственного значения определен однозначно.
5. Докажите, что у любой симметрической билинейной функции есть ортогональный базис.
6. Докажите закон инерции.
7. Докажите критерий Сильвестра.
8. Докажите, что любой симметрический оператор в евклидовом пространстве имеет ортонормированный собственный базис. Докажите, что в вещественном пространстве любые две симметрические билинейные формы, одна из которых положительно определена, могут быть одной заменой базиса одновременно приведены к диагональному виду.
9. Докажите, что в евклидовом пространстве любой ортогональный или кососимметрический оператор может быть ортогональной заменой приведен к блочно-диагональному виду с блоками размера не больше 2.
10. Докажите, что любой нормальный оператор в эрмитовом пространстве имеет ортонормированный собственный базис.
11. Докажите, что из любого положительного самосопряженного оператора в конечномерном евклидовом или эрмитовом пространстве можно однозначно извлечь квадратный корень, являющийся положительным самосопряженным оператором. Докажите, что у любого невырожденного оператора в евклидовом или эрмитовом пространстве существует единственное полярное разложение.
12. Докажите теорему Декарта.
13. Докажите лемму Гаусса.
14. Докажите, что кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально.