Программа коллоквиума – 2

Определения:

Группа; подгруппа; порядок группы; циклическая подгруппа; порядок элемента группы; гомоморфизм групп; действие группы на множестве; орбита; стабилизатор (стационарная подгруппа); нормальная подгруппа; факторгруппа; внутренний автоморфизм группы; класс сопряженности; свободная группа; группа, заданная образующими и соотношениями; абелева группа; свободная абелева группа конечного ранга; прямая сумма абелевых групп; прямое произведение колец; кольцо классов вычетов; функция Эйлера; область целостности; поле частных; евклидово кольцо; кольцо гауссовых целых чисел; идеал; факторкольцо; главный идеал; обратимые и простые (неприводимые) элементы в области целостности; факториальное кольцо.

Формулировки:

Теорема Лагранжа; формула орбит; формула Бернсайда; теорема о гомоморфизмах групп; свойство универсальности группы, заданной образующими и соотношениями; китайская теорема об остатках; теорема о классификации конечно порожденных абелевых групп; теорема о гомоморфизмах колец.

Теоретические вопросы:

1. Докажите теорему Лагранжа и формулу орбит. Докажите формулу Бернсайда.
2. Докажите, что каждая перестановка единственным образом раскладывается в произведение независимых циклов. Опишите классы сопряженности в симметрической группе.
3. Докажите существование факторгруппы по нормальной подгруппе. Докажите теорему о гомоморфизмах групп.
4. Докажите существование свободной группы с заданным множеством образующих.
5. Докажите свойство универсальности группы, заданной образующими и соотношениями.
6. Докажите существование факторкольца по идеалу. Докажите теорему о гомоморфизмах колец.
7. Докажите китайскую теорему об остатках. Докажите мультипликативность функции Эйлера.
8. Докажите, что ранг свободной абелевой группы корректно определен (для случая конечного ранга). Докажите, что любая подгруппа свободной абелевой группы конечного ранга является свободной абелевой группой.
9. Докажите, что любая конечно порожденная абелева группа изоморфна конечной прямой сумме примарных циклических и бесконечных циклических.
10. Докажите, что набор порядков примарных циклических и бесконечных циклических групп, прямой сумме которых изоморфна данная конечно порожденная абелева группа, определен однозначно.
11. Докажите, что в евклидовом кольце любой идеал - главный, причем факторкольцо по идеалу является полем тогда и только тогда, когда элемент, порождающий этот идеал, прост.
12. Докажите, что любое евклидово кольцо факториально.
13. Докажите, что натуральное число представляется в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда в его разложение на простые множители каждое простое число вида $4n + 3$ входит в четной степени.