Программа коллоквиума

Определения:

Коммутативное кольцо, поле, поле комплексных чисел, векторное пространство над полем, линейная зависимость, линейная оболочка, базис, размерность, подпространство векторного пространства, линейное отображение (линейный оператор), ядро и образ линейного отображения, сумма подпространств, прямая сумма, матрица над полем $\Bbbk$, произведение матриц, единичная матрица, обратная матрица, транспонированная матрица, матрица линейного отображения, матрица замены базиса, перестановка из n элементов, произведение перестановок, знак перестановки, определитель матрицы, минор матрицы, ранг матрицы, факторпространство, двойственное пространство, двойственный базис, аннулятор подпространства, сопряженный оператор.

Теоретические вопросы:

1. Докажите, что комплексные числа образуют поле. Докажите формулу Муавра.

2. Докажите, что элементарными преобразованиями каждую матрицу можно привести к ступенчатому виду. Опишите метод Гаусса решения системы линейных уравнений.

3. Сформулируйте и докажите условия совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах ступенчатого вида (расширенной) матрицы системы. Докажите, что общее решение неоднородной системы линейных уравнений представляется как сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

4. Докажите, что для умножения матриц выполнены свойства ассоциативности и дистрибутивности относительно сложения.

5. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм вычисления обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.

6. Докажите, что если векторное пространство порождено конечным семейством векторов, то в нем есть конечный базис, и все базисы имеют равное число элементов. Докажите, что в конечномерном векторном пространстве любое линейно независимое семейство векторов можно дополнить до базиса.

7. Напишите и докажите формулу, выражающую размерность суммы двух подпространств через размерности самих подпространств и размерность их пересечения.

8. Напишите и докажите формулу преобразования матрицы линейного оператора $F : V \to V$ при замене базиса.

9. Докажите, что для произвольного линейного отображения $F : V \to W$ подходящим выбором базисов в V и W матрица F может быть приведена к блочному виду $\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где E — единичная матрица. Как связаны размерности ядра и образа линейного отображения?

10. Докажите, что знак произведения перестановок равен произведению их знаков, и что знак любой транспозиции равен минус единице.

11. Докажите, что определитель матрицы является полилинейной кососимметрической функцией ее столбцов.

12. Докажите, что любая полилинейная кососимметрическая функция столбцов квадратной матрицы пропорциональна определителю. Выведите формулу для определителя произведения матриц.

13. Напишите и докажите формулы для изменения определителя при элементарном преобразовании строк (столбцов). Докажите, что квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

14. Сформулируйте и докажите формулы Крамера для решения системы линейных уравнений.

15. Напишите и докажите формулу для обратной матрицы через алгебраические дополнения.

16. Докажите, что три определения ранга матрицы (через строки, столбцы и миноры) эквивалентны.

17. Докажите, что для конечномерного векторного пространства V дважды двойственное пространство V^{**} канонически изоморфно V.

18. Докажите, что для подпространства W конечномерного векторного пространства V двойственное пространство W^* канонически изоморфно факторпространству $V^*/Ann(W)$.

19. Сформулируйте и докажите теорему о связи ядра и образа сопряженного линейного оператора с ядром и образом исходного линейного оператора.