Определители
Семинар 9.

Задача 1. Пусть A – целочисленная матрица. Пусть A_p – матрица, в которой все числа заменены на остатки по модулю простого числа p. Известно, что ранг матрицы A_p, задающей отображение из $\mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p^m$, равен r. Докажите, что ранг исходной матрицы, задающей отображение из $\mathbb{Q}^n$ в $\mathbb{Q}^m$, не меньше, чем r.

Задача 2. Решите задачу 10 про коров из листочка 1, вычислив ранг матрицы $I - Id$ над $\mathbb{F}_2$, где I – матрица, все матричные элементы которой равны 1.

Задача 3. Вычислите определители **(a)** $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; **(b)** $\begin{vmatrix} a_0 & -y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -y & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -y \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

Задача 4. Вычислите определитель Вандермонда $\Delta(x_1, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ & & \dots & \dots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Задача 5. Докажите, что набор векторов $v_1, \dots, v_n \in V$, удовлетворяющий условию $Av_i = \lambda_i v_i$ для некоторого набора из попарно различных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и линейного отображения $A : V \to V$, линейно независим.

Задача 6. Докажите, что *циркулянт* $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ & & \dots & \dots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$ равен $f(1)f(\xi)f(\xi^2)\dots f(\xi^n)$, где $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, а $\xi = \exp(\frac{2\pi}{n+1})$ – примитивный корень $(n+1)$-ой степени из единицы.

Задача 7. Вычислите определители **(a)** $\begin{vmatrix} 1{+}x_1 & 1{+}x_2 & 1{+}x_3 & \dots & 1{+}x_n \\ 1{+}x_1^2 & 1{+}x_2^2 & 1{+}x_3^2 & \dots & 1{+}x_n^2 \\ & & \dots & \dots & \\ 1{+}x_1^n & 1{+}x_2^n & 1{+}x_3^n & \dots & 1{+}x_n^n \end{vmatrix}$; **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ & & \dots & \dots & \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & x_3^{s-1} & \dots & x_n^{s-1} \\ x_1^{s+1} & x_2^{s+1} & x_3^{s+1} & \dots & x_n^{s+1} \\ & & \dots & \dots & \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

Задача 8. Вычислите определители

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ & \dots & \dots & \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$; **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ & \dots & \dots & \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}$

где $f_k(x) := a_{k0} + a_{k1}x + \dots + a_{kk}x^k$; где $\dbinom{x}{k} := \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$.

Задача 9. Вычислите определитель матрицы A порядка n, матричный элемент a_{ij} в пересечении i-строки и j-ого столбца которой вычисляется по формуле:
(a) $min(i,j)$; **(b)** $\binom{i-1}{j-1}$; **(c)** $\binom{n+i-1}{j-1}$; **(d)** * $\frac{1}{x_i - y_j}$.

Задача 10. Вычислите определители $n \times n$-матриц с помощью перемножения матриц:
(a) $\|\cos(\alpha_i - \alpha_j)\|$; **(b)** $\left\|\frac{a_i^n - b_j^n}{a_i - b_j}\right\|$; **(c)** $\|(a_i + b_j)^n\|$.

Задача 11*. Докажите равенство

$$S_{n,r} := \sum_{k=1}^{n} k^r = (-1)^{r-1}\frac{n(n+1)}{(r+1)!}\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \binom{2}{0} & 3 & 0 & 0 & \dots & -n \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & 4 & 0 & \dots & n^2 \\ & & \dots & \dots & & \\ \binom{r}{0} & \binom{r}{1} & \binom{r}{2} & & \dots & (-1)^{r-1}n^{r-1} \end{matrix}\right\|,$$

проверив рекуррентное соотношение

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\binom{r}{j-1}S_{n,j} + (-1)^{r-1}S_{n,r} = (-1)^{r-1}n^r(n+1).$$

Выведите отсюда следующий полезный факт:

Для многочлена $f(x) = a_0 + \dots + a_rx^r$ сумма $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ значений в первых n натуральных числах является многочленом степени $r+1$ по n.