Определители

Семинар 8.

Задача 1. Докажите, что набор из n непрерывных функций $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линейно независим тогда и только тогда, когда существует набор различных точек $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ такой, что определитель матрицы $f_i(p_j)$ отличен от нуля.

Задача 2. Вычислите коэффициент при x^4 и x^3 у определителя матрицы $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & x \\ x & 3 & x & 4 \\ -1 & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 3. Вычислите определитель **(a)** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$; **(b)** $\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & t \end{vmatrix}$.

Задача 4. Как изменится определитель матрицы порядка n, если

(a) 5-ую и 7-ую строчки матрицы умножить на константу c;

(b) у всех элементов матрицы изменить знак на противоположный;

(c) элементы изменить по правилу $a_{ij} \mapsto c^{j-i} a_{ij}$ для заданного $c \neq 0$;

(d) первый столбец поставить на последнее место, а остальные столбцы сдвинуть влево, сохраняя их расположение;

(e) записать строки в обратном порядке?

Задача 5. Как меняется детерминант матрицы при элементарных преобразованиях строк (столбцов) этой матрицы?

Задача 6. Числа 20604, 53227, 25755, 20927, 289 делятся на 17.

Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ тоже делится на 17.

Задача 7. Вычислите определитель

(a) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{x+z}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$; **(b)** $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ & \dots & \dots & \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

Задача 8. Пусть $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – отображение из пространства многочленов степени не выше n в себя, сопоставляющее многочлену $f(x)$ многочлен $f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2} + \frac{f'''(x)}{6} + \dots$. Вычислить определитель матрицы этого отображения, записанной в базисе интерполяционных многочленов $f_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, где $x_0, \dots, x_n$ – набор из $(n+1)$ различных точек на прямой $\mathbb{R}$.

Задача 9. Сравните количество операций, нужных для вычисления

(a) определителя $n \times n$ матрицы по явной формуле и методом Гаусса;

(b) обратной матрицы размера $n \times n$ методом Крамера и методом Гаусса.

Какой из методов быстрее для матриц 3×3 и матриц 4×4.

Задача 10. Вычислите обратные матрицы с помощью метода Крамера

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; **(b)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Задача 11. Пусть A матрица, матричные элементы которой являются многочленами. Докажите, что обратная к ней матрица с коэффицинтами в многочленах существует тогда и только тогда, когда её определитель является числом, отличным от нуля.

Задача 12. *(Формула Бине-Коши)* Пусть A – матрица размера $m \times n$ и B – матрица размера $n \times m$ (для $m > n$). Докажите, что $det(AB) = 0$ и $det(BA) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant m} A_{i_1 \dots i_n} B_{i_1 \dots i_n}$, где $A_{i_1 \dots i_n}$ (соответственно $B_{i_1 \dots i_n}$) – миноры порядка m, составленные из строк (столбцов) с номерами $i_1, \dots, i_n$.