Векторные пространства, Линейные отображения
Семинар 7.

Задача 1. Показать, что

(a) если размерность подпространства равна размерности объемлющего пространства, то они совпадают;

(b) в векторном пространстве есть пространства всех меньших размерностей;

(c) если два пространства пересекаются по нулю, то их сумма изоморфна прямой сумме подпространств.

Задача 2. Доказать, что если векторы $v_1, \ldots, v_k \in V$ линейно независимы, а векторы $v_1, \ldots, v_k, v$ линейно зависимы, то вектор v выражается через $v_1, \ldots, v_k$.

Задача 3. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ – различные рациональные числа из интервала $(0, 1)$. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ числа $2^{r_1}, \ldots, 2^{r_n}$ линейно независимы.

Задача 4. Пусть α комплексный корень многочлена $p \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимого над $\mathbb{Q}$. Найдите размерность над $\mathbb{Q}$ пространства $\mathbb{Q}[\alpha]$, состоящего из значений многочленов с рациональными коэффициентами в точке α.

Задача 5. Пусть $U_1, \ldots, U_n$ – подпространства конечномерного векторного пространства V. Покажите или опровергните, что

(a) если $\dim(U_1 + U_2) = 1 + \dim(U_1 \cap U_2)$, то сумма $U_1 + U_2$ совпадает с одним из подпространств, а пересечение $U_1 \cap U_2$ с другим;

(b) если $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$, то $U_1 \cap U_2 \neq 0$;

(c) $\dim U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$,

(d) $(U_1 + U_2) \cap (U_2 + U_3) \cap (U_1 + U_3) = [(U_2 + U_3) \cap U_1] + [(U_1 + U_2) \cap U_3]$

(e) если $U_1 \cup U_2 = V$ то $V = U_1$ или $V = U_2$;

(f) если поле коэффициентов бесконечно и $V = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, то V совпадает с одним из U_i.

Задача 6. Пусть U – подпространство кососимметричных матриц, V – подпространство верхнетреугольных матриц в векторном пространстве матриц $Mat_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Докажите, что $U \oplus V = Mat_{n\times n}(\mathbb{Q})$ и опишите операторы проекции P на U и на V в базисе из матричных единиц E_{ij}.
Проектором называется линейное отображение $P_U : U \oplus V \to U \oplus V$, такое что $KerP_U = V$, $ImP_U = U$ и $P^2 = P$.

Задача 7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. матрица линейного отображения из $V := \mathbb{Q}^5$ в $W := \mathbb{Q}^3$. Пусть U подпространство в V, натянутое на вектора $(1, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 1, -1, 0)$. Выберете какой-нибудь базис в фактор-пространствах V/U и $W/Im(U)$ и опишите матрицу отображения $\tilde{A} : V/U \to W/Im(U)$, индуцированного отображением A.

Задача 8. Пусть A линейное отображение из $V := \mathbb{Q}^5$ в $W := \mathbb{Q}^3$, заданное матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Выпишите матрицу этого же линейного преобразования в других координатах, заданных новыми базисами $S \subset \mathbb{Q}^5$ и $S' \subset \mathbb{Q}^3$, где

(a) $S := \{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$, $S' := \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$;

(b) $S := \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_4, e_5\}, S' := \{f_1, f_1 + f_2, f_1, +f_2 + f_3\}$, где e_i базис в V, f_j базис в W.

Задача 9. Пусть система векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^m$ получена из системы векторов $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}^n$ путем вычеркивания одного и того же набора координат. Тогда система w называется удлинением системы v и, наоборот, v называется укорачиванием w. Верно ли, что линейная (не)зависимость удлиненной (укороченной) системы влечет линейную (не)зависимость укороченной (соотв. удлиненной) системы?

Задача 10. Пусть $A, B : V \to W$ пара линейных отображений, причём $\dim Im(A) \leqslant \dim Im(B)$. Докажите, что существует пара преобразований $C \in End(V)$, $D \in End(W)$, одно из которых обратимо, таких что $A = DBC$.

Задача 11. Пусть $V_0 \xrightarrow{A_1} V_1 \xrightarrow{A_2} \ldots \xrightarrow{A_n} V_n$ последовательность линейных отображений векторных пространств. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \dim Ker(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \dim(V_i/Im(A_i)) = \dim V_0 - \dim V_n$$