Линейные отображения, ранг Матрицы

Семинар 6.

Задача 1. Докажите, что функции $\sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(nx)$ образуют набор линейно независимых векторов в векторном пространстве $\mathbb{R}$-значных функций на прямой.

Задача 2. Вычислите ранг отображения, заданного $n \times n$-матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Вычислите размерности ядра и образа линейного отображения заданного матрицей

(a) $\mathsf{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, **(b)** $\mathsf{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Докажите, что ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов этих матриц: $\mathsf{rk}(A+B) \leqslant \mathsf{rk}(A) + \mathsf{rk}(B)$.

Задача 5. Докажите, что любая матрица ранга r может быть представлена в виде суммы r матриц ранга 1.

Задача 6. Докажите, что ранг $\mathsf{rk}(A \cdot B)$ произведения $m \times n$-матрицы A и $n \times k$-матрицы B

(a) не превосходит ранга каждой из этих матриц: $\mathsf{rk}(A \cdot B) \leqslant min(\mathsf{rk}(A), \mathsf{rk}(B))$,

(b) не меньше, чем $\mathsf{rk}(A) + \mathsf{rk}(B) - n$.

Задача 7. Пусть A и B – две квадратные матрицы одинакового порядка $n \times n$. Докажите, что размерность образа отображения $\varphi : \mathbb{k}^{2n} \to \mathbb{k}^{2n}$, заданного матрицей удвоенного размера

(a) $\begin{pmatrix} A & B \\ 3A & 2B \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} A & AB \\ B & B+B^2 \end{pmatrix}$

равна сумме размерностей образов отображений A и B.

Задача 8. Пусть A – вырожденная 2×2 матрица. Докажите, что существует базис, в котором эта матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 9.

(a) Матрица $A = (a_{ij})$ имеет ранг $\geqslant k$,] тогда и только тогда, когда в ней существует набор из k линейно независимых вектор-столбцов, (соответственно существует набор из k линейно независимых строк).

(b)* Дана $m \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ ранга k. Известно, что для двух подмножеств $S \subset \{1, \dots, m\}$, $S' \subset \{1, \dots, n\}$ мощности k соответствующий набор из k строк $\{a_{ij} | i \in S\}$ линейно независим (набор из k столбцов $\{a_{ij} | j \in S'\}$ также линейно независим). Докажите, что $k \times k$-матрица $\{a_{ij} | i \in S, j \in S'\}$ обратима.

Задача 10. Докажите, что элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы задает линейное отображение из векторного пространства матриц в себя. Найдите матрицу этого преобразования в каком-нибудь базисе и вычислите её ранг. Представьте элементарное преобразование строк (столбцов), как оператор умножения на некоторую матрицу слева (справа); на какую?

Задача 11. Верно ли, что любое линейное отображение φ из векторного пространства $n \times n$ матриц в себя представляется в виде $\varphi(X) = AXB$ для некоторой пары матриц A, B? Однозначен ли выбор матриц A, B?

Задача 12. Вычислите

(a) количество линейных отображений из $\mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q^n$ ранга r;

(b) количество систем из m линейных однородных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{F}_q$ на n неизвестных, имеющих ровно q^r решений.