Базисы и размерность векторных пространств

Задача 1. Выберите базис в векторном пространстве решений системы однородных линейных уравнений: $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-6x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 2x_1-2x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases}$

Задача 2. Какова размерность векторного подпространства натянутого на вектора v_1, v_2, v_3, v_4, где

(a) $v_1=(2,1,3,5),\ v_2=(3,1,4,-2),\ v_3=(5,1,6,-16),\ v_4=(5,2,7,3)$, $v_i \in \mathbb{C}^5$,

(b) $v_i := (\cos(\alpha_i-\beta_1), \ldots, \cos(\alpha_i-\beta_n))$, $v_i \in \mathbb{C}^n$, α_j, β_i различны.

Задача 3. Вычислите размерность пересечения и суммы двух подпространств натянутых на систему из 2 векторов $\{(2,1,0,3,0),(3,1,0,2,0)\}$ и систему из 3 векторов $\{(1,1,1,1,1),(2,3,1,4,1),(3,4,2,5,2)\}$ соответственно.

Задача 4. Пусть векторы e_1, e_2, e_3, x заданы своими координатами в некотором базисе

(a) $e_1=(1,1,1), e_2=(1,1,2), e_3=(1,2,3), x=(6,9,14)$;

(b) $e_1=(2,1,-3), e_2=(3,2,-5), e_3=(1,1,-1), x=(6,2,-7)$.

Доказать, что (e_1,e_2,e_3) – также базис пространства, найти координаты вектора x в этом базисе.

Задача 5. Докажите, что каждая из двух систем векторов S и S' является базисом. Найдите матрицу перехода от S к S', где $S=\{(1,1,1),(1,0,1),(1,3,0)\}$, $S'=\{(2,1,1),(1,2,1),(0,1,2)\}$

Задача 6. Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+i\sqrt{3}]$ является векторным пространством над $\mathbb{Q}$. Вычислите его размерность и предъявите какой-нибудь базис.

Задача 7. Даны векторы $v_1=(0,2,0,7,0)$, $v_2=(1,2,3,4,5)$, $v_3=(0,3,0,4,0)$, $v_4=(1,8,5,7,1)$, $v_5=(0,1,0,2,0)$. Существуют ли набор чисел c_{ij}, такой что векторы $w_i := \sum_{j=1}^{5} c_{ij}v_j$ для $i=1,\ldots,5$ линейно независимы.

Задача 8. Про каждое из нижеперечисленных условий на многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами выясните, является ли соответствующее подмножество в многочленах степени не выше n векторным подпространством, если да, то какова его размерность, предъявите какой-нибудь базис:

(a) $f(x_1)=f(x_2)=\ldots=f(x_k)$, где $x_1,\ldots,x_k$ набор из попарно различных рациональных чисел;

(b) $f^{(k)}(x)|_{x=x_0}=0$ (k-ая производная в точке x_0 равна нулю);

(c) $f'(x)|_{x=x_1}=f''(x)|_{x=x_2}$

(d)* $f(\sqrt{-1})=0$.

Задача 9. Вычислите количество

(a) ненулевых элементов в векторном пространстве размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов;

(b) базисов в векторном пространстве размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов;

(c) векторных подпространств размерности k в n-мерном пространстве;

(d) пар векторных подпространств $V \subset W \subset \mathbb{F}_q^n$ с фиксированными размерностями: $\dim_{\mathbb{F}_q} V=k$, $\dim_{\mathbb{F}_q} W=l$;

(e) возрастающих цепочек вложенных векторных пространств $V_1 \subset \ldots \subset V_n=\mathbb{F}_q^n$, $\dim_{\mathbb{F}_q} V_i=i$.