Обратная матрица, правило Крамера, умножение матриц

Семинар 4.

Задача 1. Назовем $n \times n$-матрицу $A = (a_{ij})$ блочно-треугольной, если для любой пары индексов i, j, такой что $j \leqslant k < i$, $a_{ij} = 0$ (где k зафиксировано). Докажите, с помощью метода Гаусса, что матрица обратная к блочно-треугольной матрице будет блочно-треугольной матрицей.

Задача 2. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$ в которой правая часть определяется, как единственное решение другой системы линейных уравнений $\begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 3 \\ -b_1 + b_2 + b_3 = 4 \\ b_1 + b_2 - 2b_3 = 5 \end{cases}$, предварительно исключив переменные b_i из правой части системы путем перемножения матриц.

Задача 3. Вычислите координаты x_1, x_2 решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_5 = 0, \\ 7x_1 - x_2 - x_6 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_7 = 0, \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 + x_7 = 1, \\ x_3 - x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 2 \end{cases}$$

Указание: Обозначить $b_i := x_{i+2}$ и сведите систему к системе 2×2 путем перемножения матриц.

Задача 4. Перемножьте матрицы

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Задача 5. Докажите, что произведение двух блочно-треугольных матриц снова будет блочно-треугольной матрицей.

Задача 6. Представьте матрицу $\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ & \dots & \\ \cos(\alpha_m-\beta_1) & \dots & \cos(\alpha_m-\beta_n) \end{pmatrix}$ в виде произведения двух матриц и докажите, что соответствующая однородная система линейных уравнений имеет бесконечно много решений, если $n > 2$.

Задача 7. Докажите, что система $\{\sum a_{ij}x_j = b_i\}$ из m уравнений на n неизвестных имеет q^{n-1} решений над полем $\Bbbk$ из q элементов, тогда и только тогда, когда расширенная матрица $(A|b)$ является произведением C^tD, где $C = (c_1, \dots, c_m)$, $D = (d_1, \dots, d_{n+1})$.

Задача 8. Докажите явно, что $(AB)^t = B^tA^t$, где матрица A^t обозначает матрицу, транспонированную к матрице A.
Докажите, что система из n линейных уравнений на n неизвестных $\{\sum a_{ij}x_j = b_i\}$ имеет единственное решение, тогда и только тогда, когда система $\{\sum a_{ij}x_i = b_j\}$ имеет единственное решение.

Задача 9. Докажите, что линейная система

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + \ldots + x_n = b, \\ \ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b^n \end{cases}$$

имеет единственное решение; найдите его для $n = 3$ используя метод Крамера. Сравните с пунктом (b) следующей задачи.

Задача 10. Используя линейные уравнения докажите, что многочлен $f(x)$ с рациональными (комплексными) коэффициентами степени n однозначно определяется

(a) значением в точке p и значением своих первых n производных в той же точке p. Т.е. $f(p), f'(p), \dots, f^{(n)}(p)$ однозначно определяют $f(x)$.

(b) своими значениями в $n+1$ различной точке.

(c) значениями в точках q и p и значениями первых $k-1$ производных в точке q и первых $n-k$ производных в точке p. Т.е. $f(q), f'(q), \dots, f^{(k-1)}(q); f(p), f'(p), \dots, f^{(n-k)}(p)$ однозначно определяют $f(x)$.

(d)* значениями в наборе точек $p_1, \dots, p_k$ и первых n_i производных в точках p_i, так что $\sum_{i=1}^{k}(n_i + 1) = n + 1$.

(e)* Верна ли однозначность, если в предыдущем пункте рассматривать не последовательные производные.