Метод Гаусса, Линейные Уравнения, Обратная матрица, Правило Крамера для 2×2 и 3×3-матриц. Семинар 3.

Задача 1. Решить систему уравнений на α, β, γ:

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3, \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 10, \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9. \end{cases}$$

Задача 2. Пусть система из n линейных уравнений $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ на m неизвестных с целыми коэффициентами имеет единственное целое решение. Верно ли, что

(a) система имеет единственное решение над $\mathbb{Q}$ (соответсвенно над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).

(b) та же система $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b'}$ с изменённой правой частью имеет ровно одно решение.

(c) вопрос (b) для случая $m = n$.

Задача 3. Примените метод Гаусса (преобразования строк) к $3 \times (3+3)$-матрице

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Объясните, как связана полученная матрица и решение линейной системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & b_3 \end{array}\right)$ с произвольной правой частью.

Задача 4. Решите системы линейных уравнений

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = b_3 \end{cases}$$

Задача 5. Докажите, что матрица обратная к верхнетреугольной матрице, верхнетреугольна.

Задача 6. Докажите, что для любой ненулевой пары вещественных чисел a, b и комплексных c_1, c_2 система

$$\begin{cases} ax + by = c_1 \\ -bx + ay = c_2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение над полем комплексных чисел.

Задача 7. Докажите, что если система $Ax = b$ из 3-х уравнений на 3 неизвестных с целыми коэффициентами имеет единственное решение в остатках по модулю фиксированного числа p, то она же имеет единственное решение в $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Задача 8. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = b_1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = b_2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$ в которой правая часть определяется, как единственное решение другой системы линейных уравнений $\begin{cases} (1+\lambda)b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ b_1 + (1+\lambda)b_2 + b_3 = \lambda \\ b_1 + b_2 + (1+\lambda)b_3 = \lambda^2 \end{cases}$